

<https://doi.org/10.24867/JPE-1993-10-193>

PRETHODNO SAOPŠTENJE

Milislavljević, B., Zeljković, M.

SLOBODNE OSCILACIJE SA PRIGUŠENJEM GLAVNIH VRETENA MAŠINA ALATKI

FREE DAMPED VIBRATIONS OF MACHINE TOOLS MAIN SPINDLES

Summary:

The linear vibrations of axial structures are studied as models for free undamped and damped vibrations of machine tool main spindle. Here we investigate the general model of an axial structure using the finite element method. Our main purpose is to obtain the natural circular frequencies, i.e. natural frequencies, of the considered axial structure.

The axial structure is discretized by (n) beam finite elements. The radial and axial displacements of an arbitrary nodal point on the axial structure are \mathbf{u} and \mathbf{w} , and the bending about y-axis will be measured by the angle ϑ . So, each nodal point of the finite element has a three degrees of freedom. Then, axial structure has a $3n+n$ degrees of freedom. Under the spindle bearings the degrees of freedom of the axial structure will be reduced.

By introducing n_1 bearings at i -th nodal points ($i=i_1, i_2, \dots, i_{n_1}$), with property $\mathbf{w}_i=0$; n_2 bearings at j -th nodal points ($j=j_1, j_2, \dots, j_{n_2}$) with property $\mathbf{u}_j=0$; and n_3 bearings at k -th nodal points ($k=k_1, k_2, \dots, k_{n_3}$) with properties: $\mathbf{u}_k=0, \vartheta_k=0$ the considered general axial structure is of $3n+3-(n_1+n_2+2n_3)$ degrees of freedom.

For the free vibration of the undamped or damped system of several degrees of freedom, the equations of motion expressed in matrix form become (28), that is (32). The symmetric matrices $[K]$, $[M]$ and $[B]$ are, respectively, stiffness matrix, inertia matrix and internal damping matrix. The matrix $[B]$ is assuming proportional to $[M]$. The proportional constant is called logarithmic decrement (39) (see: [7]).

Assuming harmonic motion Eq. (28) becomes the characteristic equation (31) of the free linear undamped vibration of the axial structure. The roots of the Eq. (31) results in the spectra of natural circular frequencies: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}$. When the internal damping is assumed then we introduce the substitution (34). Thus (33) has been transformed to the Eq. (35). The characteristic equation of the free linear damped vibrations of an axial structure is defined by the Eq. (38) or Eq. (40). The spectra of natural damped circular frequencies is $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}$. The estimate to the internal damping influence is made by recognizing that the ratio (41) is $\ll 1$. Applications of the general results to the determination of natural circular frequencies in two cases of discretization: $(n)=2, (n)=6, n_1=2, n_2=0, n_3=0$ is shown. Numerical results are presented for approximation method, i.e. lumped mass method, and shown in Table 5.

The presence of dissipation in the considered axial structure exhibit small influence on the magnitude of natural damped circular frequencies. It follows from the criteria (41) that the internal damping in an axial structure is small [2].

*) Milislavljević dr Branko, dipl. ing., docent, Zeljković mr Milan, dipl. ing., asistent, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, V. Perića Valtera 2.

Rezime:

Predmet razmatranja ovog rada su slobodne oscilacije aksijalne strukture. Uticaj prigušenja u materijalu u jednom slučaju se zanemaruje, dok se u drugom uzima u obzir. Aksijalna struktura je diskretizovana konačnim elementima u obliku grede, pri čemu svaki čvor ima tri stepena slobode. Uležištenje glavnog vretena može da se vrši na tri načina, što umanjuje stepen slobode aksijalne strukture. Za ovako definisanu strukturu formirane su matrica krutosti i inerciona matrica. Pretpostavljeno je da matrica prigušenja zavisi od inercione matrice.

Diferencijalna jednačina oscilovanja aksijalne strukture definiše frekventnu (karakterističnu) jednačinu razmatranog problema. Pri uzimanju u obzir prigušenja u materijalu, vrši se transformacija vektora ukupnog pomeraja, zasnovana na vezi matrice prigušenja i inercione matrice. Nakon toga se definiše karakteristična jednačina oscilovanja sa prigušenjem. Uticaj prigušenja proverava se kriterijumom (41).

Postavljeni opšti model ilustrovan je na primeru aksijalne strukture u kome su izvršene diskretizacije na $(n)=2$ i $(n)=6$ konačnih elemenata. Aksijalna struktura se oslanja na dva elastična ležaja. Prigušenje u materijalu uvodi se pomoću logaritamskog dekrementa oscilovanja, za koji su uzete tri različite vrednosti. Rezultati pokazuju da je uticaj prigušenja na veličinu kružnih frekvencija, odnosno frekvencija, mali. Kriterijum (41) pokazuje da se radi o sistemu sa malom disipacijom. Povećanjem broja konačnih elemenata uticaj prigušenja je veći. Ovo se može objasniti povećanjem broja unutrašnjih površina, jer se na njima uzima u obzir prigušenje.

1.0 UVODNE NAPOMENE

Sklop glavnog vretena mašine alatke sa stanovišta konstrukcije predstavlja funkcionalni kompleks koji obezbeđuje potrebno obrtno kretanje i obrtni moment radnom predmetu ili alatu u cilju ostvarivanja procesa obrade rezanjem. U velikom broju slučajeva sklop glavnog vretena ima limitirajući uticaj na tačnost, proizvodnost i uopšte kvalitet cele mašine. Zbog toga sklop glavnog vretena treba da zadovolji sledeće zahteve: visoka tačnost, velika statička krutost, dinamička stabilnost, minimalni porast temperature i minimalne toplotne deformacije, dug vek eksploatacije i sl. Za određivanje karakteristika ovog sklopa, odnosno elemenata mašine alatke uopšte, razvijen je veliki broj eksperimentalnih, analitičkih i numeričkih metoda. Posmatrajući dinamičko ponašanje, kao jedan od parametara kvaliteta sklopa glavnog vretena, odnosno posebno u eksploataciji neželjene pojave samopobudnih oscilacija jedan od ciljeva analize može biti određivanje sopstvenih frekvencija sklopa ili pojedinih njegovih elemenata. Prethodno posebno dobija na značaju ako se ima u vidu da se samopobudne oscilacije javljaju na frekvenciji koja je bliska jednoj od sopstvenih frekvencija elemenata mašine alatke [3]. Tako se visokofrekventne samopobudne oscilacije (2000 - 3000 [Hz]) javljaju zbog oscilovanja noža, srednjefrekventne (200 - 300 [Hz]) odgovaraju sopstvenim oscilacijama glavnog vretena, a niskofrekventne (80 - 150 [Hz]) su posledica ponašanja supporta ili radnog predmeta.

Za identifikaciju dinamičkog ponašanja glavnog vretena razvijene su efikasne eksperimentalne metode na bazi simulacije procesa obrade kao što je ispitivanje sinusnom pobudnom silom. Međutim, za identifikaciju dinamičkog ponašanja na bazi analitičkih i numeričkih metoda razvijen je veliki broj metoda od najprostijih koje omogućavaju određivanje samo prve sopstvene frekvencije do metoda koje omogućavaju određivanje prenosnih funkcija, odnosno amplitudno-faznih karakteristika.

U poslednje vreme efikasna identifikacija dinamičkog ponašanja složenih sistema vrši se primenom numeričkih metoda. Kod ovih metoda javljaju se dva različita metodološka pristupa. Prvi je usmeren na način rešavanja postavljenih diferencijalnih jednačina, a drugi pristup bazira na primeni matričnih metoda i rešavanju sistema algebarskih jednačina. Ovaj poslednji metod ima dominantnu primenu pri rešavanju tehničkih problema.

Sa stanovišta redukcije realnog sistema na odredjeni matematički model, zbog poteškoća koje se javljaju pri uzimanju u obzir međudejstva jednog elementa na drugi, ovi se uticaji često zanemaruju. Jedan od tipičnih primera je prigušenje u elementima sistema.

Problematika identifikacije statičkog i dinamičkog ponašanja sklopa glavnog vretena je duži niz godina predmet interesovanja u okviru istraživanja Laboratorije za mašine alatke ([10], [4], [11]). Postignuti su odredjeni rezultati kako u razvoju eksperimentalnih tako i u razvoju računarskih metoda za identifikaciju ponašanja sklopa glavnog vretena. Kroz ovaj rad se želi analizirati uticaj prigušenja u materijalu na dinamičko ponašanje glavnog vretena.

2.0 OSCILACIJE AKSIJALNE STRUKTURE

2.1 OSNOVNE POSTAVKE

Glavno vreteno, kao element sklopa glavnog vretena, predstavlja višestepenu gredu od homogenog materijala. Kako je dimenzija vretena u jednom pravcu znatno veća od dimenzija u druga dva pravca, ovi elementi se često nazivaju aksijalne strukture.

Glavno vreteno se posmatra kao aksijalna struktura postavljena na oslonce, koji u načelu mogu da budu kruti ili elastični. Ponašanje elastičnih oslonaca zavisi od tipa i vrste ležišta, koja se koriste za uležištenje glavnog vretena.

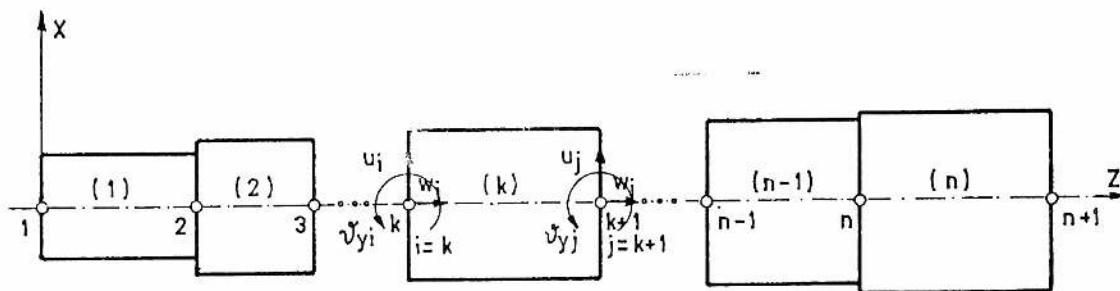
Aksijalna struktura vrši slobodno oscilovanje u (x,z) -ravni. Pri oscilovanju može da se javi prigušenje usled unutrašnjeg trenja u materijalu. Uticaj ovog trenja se uvodi pomoću logaritamskog dekrementa oscilovanja δ , jer je brojnim ogledima konstantovano da je veličina prigušenja u elastičnom materijalu nezavisna od frekvencije oscilovanja elastičnog tela [1]. Veličina logaritamskog dekrementa eksperimentalno je određena za različite materijale u zavisnosti od dilatacije, normalnih ili tangencijalnih napona [7].

U radu se posmatraju oscilacije aksijalne strukture u dva slučaja:

- bez pojave prigušenja u materijalu,
- uz pojavu prigušenja u materijalu.

2.2 OPŠTI MODEL

Razmatraće se greda promenljivog poprečnog preseka, koja vrši oscilacije u (x,z) -ravni. Greda je diskretizovana na "n" konačnih elemenata u obliku grede (v. sl.1). Tako diskretizovana greda ima $n + 1$ čvorova. Jedan konačni element ima dva čvora.



Slika 1. Opšti model aksijalne strukture
Fig. 1. General model of axial structure

Čvorovi mogu da vrše pomeranje u pravcu x-ose, koje se meri koordinatom u ; pomeranje u pravcu z-ose, koje se meri koordinatom w i savijanje oko y-ose, koje se meri koordinatom (uglom) $\vartheta_y = \vartheta$. Savijanje grede se vrši u (x,z) - ravni. Pomeraj proizvoljnog čvora označava se indeksom u odgovarajućoj koordinati. Tako ukupni vektor pomeraja aksijalne strukture glasi:

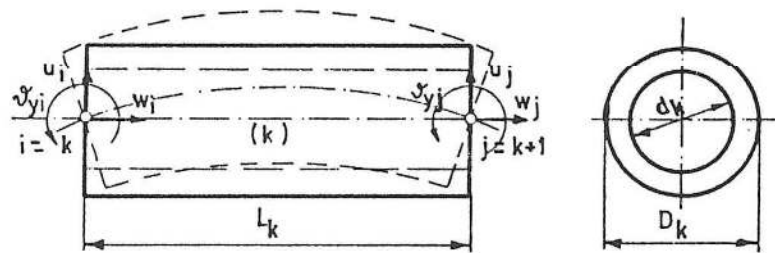
$$\{\delta\} = \{u_1 \ w_1 \ \vartheta_1 \mid u_2 \ w_2 \ \vartheta_2 \mid \dots \mid u_n \ w_n \ \vartheta_n \mid u_{n+1} \ w_{n+1} \ \vartheta_{n+1}\}^T \quad (1)$$

Za ovako postavljenu aksijalnu strukturu napisace se diferencijalna jednačina oscilacija. Da bi se to ostvarilo potrebno je sastaviti odgovarajuću matricu krutosti, inercionu matricu, kao i matricu prigušenja. Dimenzije potrebnih matrica se jednostavno odredjuju. Svaki čvor ima tri stepena slobode, pa jedan konačni elemenat ima $2 \times 3 = 6$ stepeni slobode. Odgovarajuće matrice su, dakle, dimenzije 6×6 . Diskretizovana aksijalna struktura ima $(n + 1) \times 3 = 3n + 3$ stepeni slobode, a njene matrice su dimenzija $(3n + 3) \times (3n + 3)$. Ograničenja smanjuju broj stepeni slobode, odnosno dimenzije matrica. Ovo će se kasnije detaljnije razmatrati.

Vektor (1) ima $3n + 3$ koordinata.

2.3 KARAKTERISTIKE KONAČNOG ELEMENTA U OBLIKU GREDE

Posmatraće se k -ti konačni element, koji se označava sa (k) . Konačni element je oblika grede (v.sl.2), kružnog prstenastog preseka. Levi čvor je $i = k$, a desni je $j = k + 1$.



Slika 2. Konačni element u obliku grede
Fig.2 Beam finite element

Dužina konačnog elementa je L_k , površina poprečnog preseka je A_k i aksijalni moment inercije površine poprečnog preseka za y-osu je I_k . Modul elastičnosti materijala je E . Ovim su definisane sve karakteristike uvedenog konačnog elementa.

2.3.1 Matrica krutosti konačnog elementa

Poznatim postupkom, videti na primer [5], dolazi se do matrice krutosti razmatranog konačnog elementa u obliku grede koja je, po pretpostavci, izložena savijanju u (x,z) -ravni i aksijalnom opterećenju u pravcu z-ose. Tako se dobija:

$$[K]_{(k)} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & -a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 & -c & 0 \\ b & 0 & 2d & -b & 0 & d \\ -a & 0 & -b & a & 0 & -b \\ 0 & -c & 0 & 0 & c & 0 \\ b & 0 & d & -b & 0 & d \end{bmatrix}_{(k)} \quad (2)$$

Ovde je $(k) = 1, 2, \dots, n$, a elementi matrice su koeficijenti

$$a_k = \frac{12EI_k}{L_k^3} \quad b_k = \frac{6EI_k}{L_k^2} \quad c_k = \frac{EA_k}{L_k} \quad d_k = \frac{2EI_k}{L_k}$$

Matrica (2) može se razbiti na blokove:

$$[K]_{(k)} = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix}_{(k)} \quad (3)$$

gde su podmatrice:

$$[K_{ii}]_{(k)} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & 2d \end{bmatrix}_{(k)} \quad [K_{ij}]_{(k)} = \begin{bmatrix} -a & 0 & b \\ 0 & -c & 0 \\ -b & 0 & d \end{bmatrix}_{(k)} \quad (4)$$

$$[K_{ji}]_{(k)} = [K_{ij}]_{(k)}^T \quad [K_{jj}]_{(k)} = \begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{bmatrix}_{(k)}$$

Indeksi $i = k$, $j = k+1$ označavaju čvorove posmatranog konačnog elementa (v.sl.2), a (k) je broj ovog konačnog elementa.

2.3.2 Inerciona matrica konačnog elementa

Materijal razmatrane višestepene grede je, po pretpostavci, homogen tako da je gustina konačnog elementa $\rho = \text{constans}$. Masa konačnog elementa dužine L_k i poprečnog preseka A_k iznosi $m_k = \rho A_k L_k$. Primenom metodologije za računanje inercione matrice [5], koja je izložena savijanju u (x,z) -ravni i aksijalnom opterećenju duž z -ose dobija se:

$$[M]_{(k)} = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156+504\frac{1}{A}\frac{1}{L^2} & 0 & 22L+42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 54-504\frac{1}{A}\frac{1}{L^2} & 0 & -13L+42\frac{1}{A}\frac{1}{L} \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 22L+42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 0 & 4L^2+56\frac{1}{A} & 13L-42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 0 & -3L^2-14\frac{1}{A} \\ 54-504\frac{1}{A}\frac{1}{L^2} & 0 & 13L-42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 156+504\frac{1}{A}\frac{1}{L^2} & 0 & -22L-42\frac{1}{A}\frac{1}{L} \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ -13L+42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 0 & -3L^2-14\frac{1}{A} & -22L-42\frac{1}{A}\frac{1}{L} & 0 & 4L^2+56\frac{1}{A} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gde je: $(k) = 1, 2, \dots, n$.

Analogno razbijanju matrice (2) na blokove (3) izvršiće se i razbijanje matrice (5) na blokove:

$$M = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} [M_{ii}] & [M_{ij}] \\ [M_{ji}] & [M_{jj}] \end{bmatrix}_{(k)} \quad (6)$$

gde su podmatrice

$$\begin{aligned}
 [M_{ii}]_{(k)} &= \begin{bmatrix} 156+504 \frac{1}{A} \frac{1}{L^2} & 0 & 22L+42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} \\ 0 & 140 & 0 \\ 22L+42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} & 0 & 4L^2+56 \frac{1}{A} \end{bmatrix}_{(k)} & [M_{ij}]_{(k)} &= \begin{bmatrix} 54-504 \frac{1}{A} \frac{1}{L^2} & 0 & -13L+42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} \\ 0 & 70 & 0 \\ 13L-42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} & 0 & -3L^2-14 \frac{1}{A} \end{bmatrix}_{(k)} \\
 [M_{ji}]_{(k)} &= [M_{ij}]_{(k)}^T & [M_{jj}]_{(k)} &= \begin{bmatrix} 156+504 \frac{1}{A} \frac{1}{L^2} & 0 & -22L-42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} \\ 0 & 140 & 0 \\ -22L-42 \frac{1}{A} \frac{1}{L} & 0 & 4L^2+56 \frac{1}{A} \end{bmatrix}_{(k)}
 \end{aligned} \tag{7}$$

2.3.3 Matrica prigušenja konačnog elementa

Razmatrana višestepena greda, kao aksijalna struktura u čijem materijalu postoji prigušenje oscilovanja, spada u disipativne sisteme. Formiranje matrice prigušenja vrši se prema uslovu da se ona kao kvadratna matrica može svesti na sumu kvadrata nekom linearnom transformacijom. Kada je takva transformacija moguća, tada dobijene generalisane koordinate predstavljaju normalne koordinate za disipativne sisteme. Ovo je ostvarivo kada je matrica prigušenja proporcionalna inercionoj matrici [2]. Tako je matrica prigušenja konačnog elementa u obliku grede [5]:

$$[B]_{(k)} = \frac{\beta}{\rho} [M]_{(k)} \tag{8}$$

Ovde je β koeficijent prigušenja u materijalu, dok je količnik β/ρ koeficijent proporcionalnosti izmedju matrice prigušenja i intercione matrice.

2.4 DEFINISANJE UKUPNIH MATRICA AKSIJALNE STRUKTURE

2.4.1 Shema formiranja ukupne matrice

Bilo koja od ukupnih matrica formira se korišćenjem već odredjenih matrica (2),(5),(8). Razmatrana aksijalna struktura nalazi se na z-osi. Tako može da se piše [5]:

$$[A] = \sum_{(k)} [A]_{(k)} = \sum_{(k)} [A_{rs}]_{(k)} \tag{9}$$

Ovde su $r, s = 1, 2, \dots, n, n+1$ brojevi čvorova na konačnom elementu. Ukupne matrice $[K]$, $[M]$ ili $[B]$ označene su sa $[A]$, dok matrica $[A_{rs}]_{(k)}$ označava blok-matricu matrice $[A]_{(k)}$ konačnog elementa.

Formiranje ukupne matrice $[A]$ vrši se, korišćenjem (9), prema sledećoj shemi:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}]_{(1)} & [A_{12}]_{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [A_{21}]_{(1)} & [A_{22}]_{(1)} + [A_{22}]_{(2)} & [A_{23}]_{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [A_{32}]_{(2)} & [A_{33}]_{(2)} + [A_{33}]_{(3)} & [A_{34}]_{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [A_{43}]_{(3)} & [A_{44}]_{(3)} + [A_{44}]_{(4)} & [A_{45}]_{(4)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [A_{54}]_{(4)} & [A_{55}]_{(4)} + [A_{55}]_{(5)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [A_{n-1,n}]_{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [A_{n,n}]_{(n)} + [A_{n,n}]_{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [A_{n+1,n}]_{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [A_{n+1,n+1}]_{(n+1)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Svaki konačni element ima dva čvora. Element (**k**) ima čvorove numerisane sa $i = k$ i $j = k + 1$ (v. sl.2). U ukupnoj matrici konačni element (**k**) opisuju blok- matrice:

$[A_{k,k}]_{(k-1)} + [A_{k,k}]_{(k)}$	$[A_{k,k+1}]_{(k)}$
$[A_{k+1,k}]_{(k)}$	$[A_{k+1,k+1}]_{(k)} + [A_{k+1,k+1}]_{(k+1)}$

U matičnom izrazu (10) naznačene su linijama blok-matrice koje opisuju konačne elemente (1),(2),(3),..., (n).

2.4.2 Simplifikacija članova matrica

Radi jednostavnijeg i preglednijeg pisanja ukupnih matrica uvešće se sledeće tri bezdimenzijske veličine.

Dužine konačnih elemenata u obliku grede su :

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_k, \dots, L_n$$

Uvodjenjem sledeće bezdimenzijske veličine

$$l_{k-1} = \frac{L_k}{L_1} ; l_0 = 1, k=2,3,\dots,n \quad (11)$$

gore navedene dužine mogu se pisati u sledećem obliku:

$$L_1, l_1 L_1, l_2 L_1, \dots, l_{k-1} L_1, \dots, l_{n-1} L_1$$

Moment inercije površine poprečnog preseka je

$$I_k = \frac{\pi}{64} [D_k^4 - d_k^4], \quad k=1,2,\dots,n$$

Pomoću bezdimenzijske veličine:

$$p_k = \frac{D_k^4 - d_k^4}{L_k^4}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (12)$$

i relacije (11) moment inercije poprečnog preseka postaje:

$$I_k = \frac{\pi}{64} p_k l_{k-1}^4 L_k^4, \quad k=1,2,\dots,n \quad (13)$$

Slično se, za površine poprečnih preseka konačnog elementa

$$A_k = \frac{\pi}{4} [D_k^4 - d_k^4], \quad k=1,2,\dots,n$$

može uvesti bezdimenzijska veličina

$$q_k = \frac{D_k^2 - d_k^2}{L_k^2}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (14)$$

Površina poprečnog preseka konačnog elementa, korišćenjem (11) i (14), postaje:

$$A_k = \frac{\pi}{4} q_k l_{k-1}^2 L_1^2, \quad k=1,2,\dots,n \quad (15)$$

Masa k -tog konačnog elementa je $m_k = \rho L_k A_k$. Primenom (11) i (15) izraz za masu postaje:

$$m_k = \frac{\pi}{4} \rho q_k l_{k-1}^3 L_1^3, \quad k=1,2,\dots,n \quad (16)$$

Na osnovu (13) i (15) može se pisati:

$$\frac{I_k}{A_k} = \frac{1}{16} \frac{p_k}{q_k} l_{k-1}^2 L_1^2, \quad k=1,2,\dots,n \quad (17)$$

Napomena 1: Bezdimenzijske veličine l_k , p_k , q_k definisane su, kao što se može videti gore, na sledeći način:

l_k za $k = 1, 2, \dots, n$, kada je $k = 1$ tada je $l_0 = 1$;

p_k i q_k za $k=1, 2, \dots, n$

Pisanjem opštih članova u matricama iz kojih se zatim dobijaju posebni članovi može se doći do indeksa bezdimenzijskih veličina, koji je veći od n , ili manji od 1 , ili negativan. Tada su vrednosti bezdimenzijskih veličina l_k , p_k , q_k jednake nuli, jer tada ove veličine gube svoj fizički smisao.

2.4.3 Ukupna matrica krutosti

Poštujući shemu formiranja ukupne matrice (10) pomoću matrice krutosti konačnog elementa (2) i bezdimenzijskih veličina (11), (13) i (15) dobija se ukupna matrica krutosti aksijalne strukture. Tako je:

$$[K] = \frac{\pi}{64} EL_1 \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{n,n-1} & K_{n,n} & K_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & K_{n+1,n} & K_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Dimenzija ove matrice je $(3n+3) \times (3n+3)$.

Za k -ti konačni element čiji su čvorovi numerisani sa : k i $k + 1$, saglasno razmatranju iz 2.4.1, odnosno relacijama (9),(11) i (12), važe sledeće podmatrice:

$$\begin{matrix} K_{k,k} & K_{k,k+1} & K_{k+1,k} & K_{k+1,k+1} \\ k=1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (19)$$

Na ove blok-matrice, odnosno njihove članove se odnosi Napomena I iz 2.4.2.

Prema podmatricama (19) zaključuje se da je ukupna matrica krutosti (18) simetrična matrica, koja se može predstaviti kao

$$[K] = (\pi/64) EL_1 [k_{rs}]_{(3n+3) \times (3n+3)}$$

gde je: $r,s = 1,2,\dots,3n+3$; $k_{sr} = k_{rs}^T$. Ovde treba voditi računa o tome da, saglasno podmatricama (19) i Napomeni I iz 2.4.2, važi:

$$\begin{aligned} k_{3k-2,3k+4} &= k_{3k-2,3k+5} = \dots = k_{3k-2,3n+3} = 0 \\ k_{3k-1,3k+4} &= k_{3k-1,3k+5} = \dots = k_{3k-1,3n+3} = 0 \\ k_{3k,3k+4} &= k_{3k,3k+5} = \dots = k_{3k,3n+3} = 0 \\ k_{3k+1,3k+7} &= k_{3k+1,3k+8} = \dots = k_{3k+1,3n+3} = 0 \\ k_{3k+2,3k+7} &= k_{3k+2,3k+8} = \dots = k_{3k+2,3n+3} = 0 \\ k_{3k+3,3k+7} &= k_{3k+3,3k+8} = \dots = k_{3k+3,3n+3} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

gde je: $k = 1,2,\dots,n-2$; n - broj konačnih elemenata. Ovi članovi matrice (18) takodje su simetrični.

2.4.4 Ukupna inerciona matrica

Primenom sheme (10), kao i oznaka (11),(16) i (17), na inercionu matricu konačnog elementa (5), odnosno (6), dolazi se do ukupne inercione matrice razmatrane aksijalne strukture. Slično kao u odeljku 2.4.3 dobija se:

$$[M] = \frac{1}{420} \frac{\pi}{4} \rho L^3 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & K_{23} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M_{n,n-1} & M_{n,n} & M_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & M_{n+1,n} & M_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Dimenzija ove matrice je $(3n+3) \times (3n+3)$.

Na k -tom konačnom elementu su čvorovi k i $k+1$. Za ovaj konačni element su dobijene podmatrice:

$$\begin{matrix} M_{k,k} & M_{k,k+1} & M_{k+1,k} & M_{k+1,k+1} \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (22)$$

Pri uzimanju vrednosti za k treba voditi računa o Napomeni I iz odeljka 2.4.2. Slično kao na kraju odeljka 2.4.3 može se pisati:

$$[M] = \frac{1}{420} \frac{\pi}{4} \rho L^3 [mrs]_{(3n+3) \times (3n+3)}$$

Osobine opšteg člana ove matrice su iste kao osobine opšteg člana ukupne matrice krutosti, koje su izložene na kraju odeljka 2.4.3.

2.4.5 Ukupna matrica prigušenja

Primenom sheme formiranja ukupne matrice (10) na matricu prigušenja konačnog elementa (8), dobija se ukupna matrica prigušenja razmatrane aksijalne strukture, potpuno identično kao u 2.4.3. Njen oblik je:

$$[B] = (\beta/\rho) [M] \quad (23)$$

Matrica (23) je proporcionalna matrici (22), tako da je celokupno daljnje razmatranje isto kao kod ukupne inercione matrice u odeljku 2.4.4.

Napomena II: U odeljcima 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5 određene su za razmatranu aksijalnu strukturu:

- ukupna matrica krutosti $[K]$,
- ukupna inerciona matrica $[M]$ i
- ukupna matrica prigušenja $[B]$.

Dobijeni su opšti izrazi za formiranje ukupnih matrica u zavisnosti od blok-matrice (19) i (22), odnosno izraza (20). Pri tome nisu uzimani u obzir uticaji usled uležištenja razmatrane aksijalne strukture, što će se učiniti u sledećem odeljku.

2.5 DEFINISANJE REDUKOVANIH MATRICA AKSIJALNE STRUKTURE

Glavno vreteno može u opštem slučaju da bude oslonjeno na sledeće načine:

- 1 - elastično uležištenje,
- 2 - kruto uležištenje i
- 3 - kruto-uklješteno uležištenje.

Generalisane koordinate pomeranja u odgovarajućem čvoru aksijalne strukture, zavisno od vrste uležištenja, prema gore navedenom redosledu su:

- 1 - $u_i \neq 0, w_i = 0, \vartheta_i \neq 0; i = i_1, i_2, \dots, i_{n1},$
- 2 - $u_j = 0, w_j \neq 0, \vartheta_j \neq 0; j = j_1, j_2, \dots, j_{n2},$
- 3 - $u_k = 0, w_k \neq 0, \vartheta_k = 0; k = k_1, k_2, \dots, k_{n3},$

Prema ovako uvedenim ograničenjima na čvorove, smatraće se da u i -čvorovima postoji elastično uležištenje, u j -čvorovima je kruto uležištenje, dok je k -čvorovima kruto-uklješteno uležištenje.

Ukupni vektor pomeraja (1) ima $3n + 3$ koordinata. Uvodjenjem ovde opisanih ograničenja, koja potiču od vrste i načina uležištenja razmatrane aksijalne strukture, broj koordinata se smanjuje.

Elastično uležištenje u i -čvorovima sprečava aksijalno pomeranje ovog čvora ($w_i = 0$).

Kruto uležištenje u j -čvorovima sprečava transverzalno, odnosno radijalno, pomeranje ($u_j = 0$).

Kruto-uklješteno uležištenje u k -čvorovima dovodi do sprečavanja radijalnog pomeranja aksijalne strukture u ovom čvoru ($u_k = 0$) i savijanja oko y -ose u (x,z) -ravni u ovim čvorovima ($\vartheta_k = 0$).

gde je ω - kružna frekvencija slobodnih oscilacija. Primenom (29) na (28) dolazi se do jednačine:

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\} = 0 \quad (30)$$

Vektor $\{\delta_0\}$ sadrži nepoznate koeficijente. Uslov egzistencije netrivialnih rešenja homogene algebarske jednačine (30) po $\{\delta_0\}$ dovodi do frekventne jednačine

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (31)$$

Uslov (31) je potreban i dovoljan.

Rešavanjem jednačine (31) dobija se *spektar sopstvenih kružnih frekvencija* razmatrane aksijalne strukture $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}$.

2.6.2 Slobodno oscilovanje aksijalne strukture sa prigušenjem u materijalu

Diferencijalna jednačina malih slobodnih oscilacija aksijalne strukture, uzimanjem u obzir prigušenja u materijalu, glasi

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (32)$$

Ovde je $[B]$ - redukovana matrica prigušenja (27). Ostale matrice su definisane u 2.6.1 Korišćenjem (27) jednačina (32) postaje

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + \frac{\beta}{\rho}[M]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (33)$$

Odredjivanje kružne frekvencije u ovom slučaju vršice se na sledeći način. Uvodi se smena vektora pomeraja na sledeći način

$$\{\delta\} = \{\gamma\} e^{-\frac{\beta}{2\rho}t} \quad (34)$$

gde je $\{\gamma\}$ - novi vektor, koji odgovara vektoru pomeraja $\{\delta\}$

Smenom (34) u jednačinu (33) dolazi se do sledeće diferencijalne jednačine

$$[M]\{\ddot{\gamma}\} + ([K] - \frac{\beta^2}{4\rho^2}[M])\{\gamma\} = 0 \quad (35)$$

Matrica $[K] - (\frac{\beta^2}{4\rho^2})[M]$ je realna, simetrična i pozitivno definitna. Prema tome, rešenja jednačine (35) mogu da se traže u obliku, sličnom obliku (29)

$$\{\gamma\} = \{\gamma_0\} e^{i\Omega t} \quad (36)$$

Ovde je Ω kružna frekvencija prigušenih oscilacija. Smena (36) u (35) dovodi do algebarskih jednačina.

$$\left(([K] - \frac{\beta^2}{4\rho^2}[M]) - \Omega^2[M] \right) \{\gamma_0\} = 0 \quad (37)$$

Algebarska jednačina (37) je homogena jednačina. Potreban i dovoljan uslov egzistencije netrivialnih rešenja jednačine (37) po $\{\gamma_0\}$ jeste

$$\det\left(\left([K] - \frac{\beta^2}{4\rho^2}[M]\right) - \Omega^2[M]\right) = 0 \quad (38)$$

Izraz (38) predstavlja frekventnu jednačinu slobodnih oscilacija aksijalne strukture, kada se uzima u obzir prigušenje u materijalu.

2.6.3 Bezdimenzijski koeficijent prigušenja

Uticao prigušenja oscilacija u mnogim materijalima ne zavisi od frekvencije oscilovanja. Ovo je potvrđeno eksperimentima [7]. Disipativne karakteristike oscilovanja uvode se pomoću bezdimenzijskog koeficijenta prigušenja ψ , koji se vezuje sa logaritamskim dekrementom oscilovanja, na sledeći način

$$\psi = 2\delta$$

Napomena III Treba razlikovati skalar δ i $\{\delta\}$ vektor.

Neka je ω_0 najniža vrednost kružne frekvencije oscilovanja aksijalne strukture bez unutrašnjeg trenja. Tada je logaritamski dekrement

$$\delta = 2\pi/\omega_0 \times \beta/2\rho$$

odnosno bezdimenzijski koeficijent prigušenja je

$$\psi = 2\pi/\omega_0 \times \beta/\rho$$

Vrednost logaritamskog dekrementa δ nalazi se iz odgovarajućih dijagrama [7]. Na osnovu ovog razmatranja dolazi se do sledeće veze

$$\beta/2\rho = \omega_0/2\pi \times \delta \quad (39)$$

Na osnovu ovoga jednačina (38) glasi:

$$\det\left(\left([K] - \frac{\omega_0^2}{4\pi^2}\delta^2[M]\right) - \Omega^2[M]\right) = 0 \quad (40)$$

Rešavanjem frekventne jednačine (40) dobija se *spektar rezonantnih kružnih frekvencija prigušenih oscilacija* aksijalne strukture $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}$.

2.6.4 Ocena uticaja prigušenja u materijalu

Postojanje prigušenja u elastičnom sistemu dovodi do smanjenja kružne frekvencije oscilovanja. Uticaj prigušenja ocenjuje se prema količniku normi matrice $[[M]^{-1}[B]]^2$ i $[[M]^{-1}[K]]$.

Uslov da je prigušenje malo glasi [2]

$$Q = \frac{\|[[M]^{-1}][[B]]^2\|}{\|[[M]^{-1}][K]\|} \ll 1 \quad (41)$$

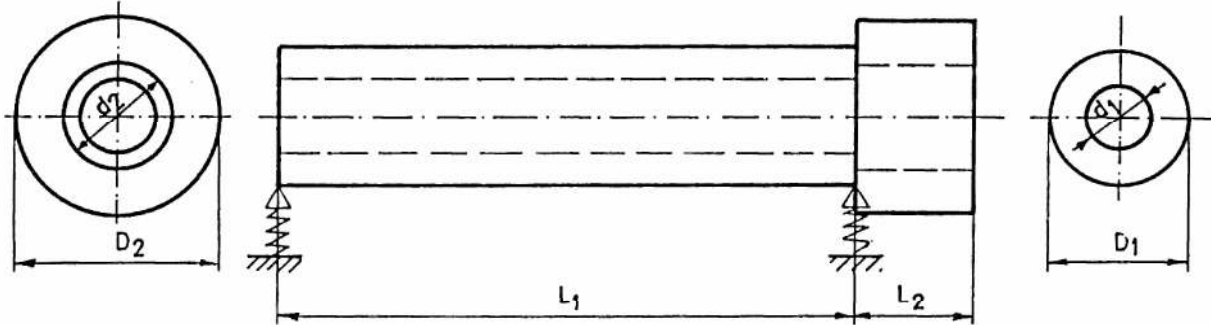
U (41) mogu se uzeti bilo koje norme matrice. Ovde je reč o Frobenijusovoj normi matrice $[A]$, tj. za $[A] = [a_{in}]_{n \times n}$ Frobenijusova norma je

$$\|[A]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

Pri maloj disipaciji kružne frekvencije uz prigušenje se malo razlikuju od sopstvenih kružnih frekvencija bez prigušenja. Tada se mogu, u prvoj aproksimaciji, zanemariti nedijagonalni elementi matrice $[M]^{-1}[B]$. Ovaj pristup je opravdan u slučajevima kada ne postoje pouzdane informacije o prigušenju.

3.0 PRIMERI

Rezultati koji se dobijaju primenom gore dobijenih razmatranja oscilovanja opšteg modela aksijalne strukture prikazaće se na primeru jednog glavnog vretena (slika 3).



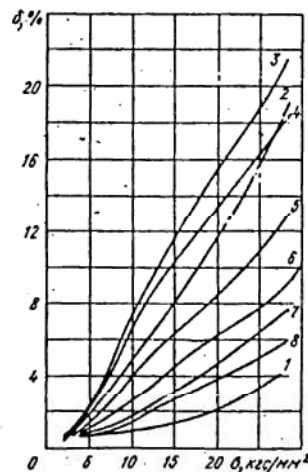
Slika 3. Glavno vreteno diskretizovano sa dva konačna elementa
Fig.3 Main spindle discretized by two finite elements

Materijal glavnog vretena je konstrukcioni čelik, modula elastičnosti $E=2.1 \times 10^{11}$ [N/m²], gustina materijala iznosi $\rho=7850$ [N/m³]. Posmatraće se slobodno oscilovanje glavnog vretena za slučaj kada se prigušenje u materijalu zanemaruje i za slučaj kada se prigušenje uzima u obzir. U slučaju kada se prigušenje uzima u obzir tada je matrica prigušenja [B] proporcionalna inercionoj matrici [M], kao što je već izloženo u odeljku 2.6.3 i definisano vezom (27). Prema odeljku 2.6.3, odnosno vezi (39) prigušenje u materijalu se uvodi na sledeći način

$$[B] = (\omega_0^2 / 4\pi^2) \delta^2 [M] \quad (42)$$

Logaritamski dekrement oscilovanja δ se očitava iz dijagrama (slika 4) za usvojeni materijal [7]. Materijal se posmatra u različitim stanjima i vrednosti δ su sledeće:

- $\delta = 2,3$ [%] = 0,023 - isporučeno stanje,
- $\delta = 13$ [%] = 0,13 - dva dana nakon normalizacije,
- $\delta = 21,5$ [%] = 0,215 - pri istezanju 4,5 [%].

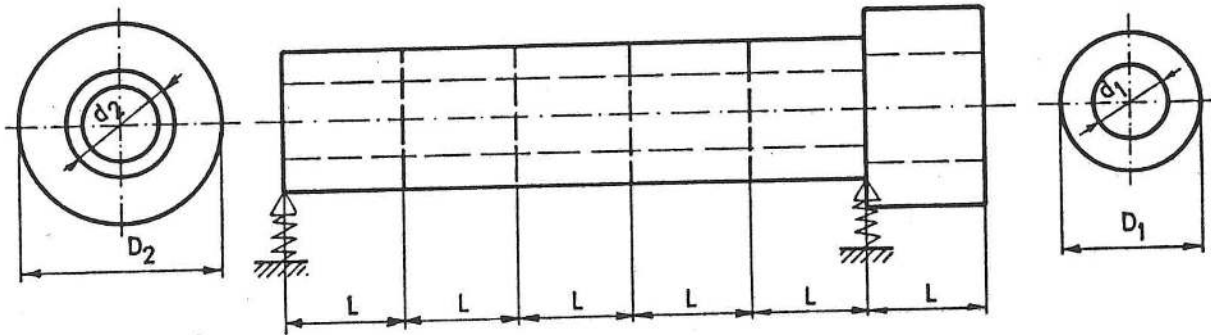


- 1 - isporučeno stanje
- 2 - pri defoirmaciji 2 [%]
- 3 - pri defoirmaciji 4.5 [%]
- 4 - pri defoirmaciji 9 [%]
- 5 - 2 dana nakon normalizacije
- 6 - 5 dana nakon normalizacije
- 7 - 20 dana nakon normalizacije
- 8 - 60 dana nakon normalizacije

Slika 4. Zavisnost logaritamskog dekrementa za različita stanja materijala
Fig. 4. Logarithmic decrement dependence for different state of materials

Diskretizacija glavnog vretena će se izvršiti na dva načina: $(n) = 2$ i $(n) = 6$ konačnih elemenata u obliku grede (slika 3. i slika 5). Dobijene vrednosti kružnih frekvencija ω_i [s^{-1}] oscilovanja glavnog vretena izraziće se kao frekvencije

$$f_i = \omega_i / 2\pi \text{ [Hz]}$$



Slika 5. Diskretizacija glavnog vretena sa šest konačnih elemenata
Fig. 5. Discretization of the main spindle by six finite elements

3.1 DISKRETIZACIJA SA DVA KONAČNA ELEMENTA

Broj konačnih elemenata je $(n) = 2$. Konačni elementi su numerisani sa (1), (2). Čvorovi konačnih elemenata numerisani su sa 1, 2, 3. U ovom slučaju (v. sl.1 i sl.3) je :

$$L_1 = 0,250 \text{ [m]}, D_1 = 0,050 \text{ [m]} \quad d_1 = 0,025 \text{ [m]}$$

$$L_2 = 0,050 \text{ [m]}, D_2 = 0,075 \text{ [m]} \quad d_2 = 0,035 \text{ [m]} .$$

Na osnovu ovih podataka, prema (11) i Napomeni I iz odeljka 2.4.2, može se pisati:

$$l_0 = 1, l_1 = 0,2, l_2 = l_3 = 0.$$

Primenom (12) i (14) dobija se:

$$p_1 = 0,0015, p_2 = 4,8224, q_1 = 0,03, q_2 = 1,76,$$

$$\text{pri tome je } p_0 = p_3 = q_0 = q_3 = 0.$$

Glavno vreteno je elastično uležišteno u čvorovima 1 i 2 (v. sl.3). Krutosti ovih ležišta su: $c_1 = 3.4 \times 10^8$ [N/m] i $c_2 = 6.8 \times 10^8$ [N/m]. Broj stepeni slobode određuje se na sledeći način. Prema uvodu odeljka 2.5 može se pisati $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 0$. Na osnovu ovoga, za razmatranu diskretizaciju glavnog vretena dobija se :

$$3n + 3 - (n_1 + n_2 + 2n_3) = 7.$$

Dakle, broj stepeni slobode je 7. Ukupni vektor pomeraja (24) ima 7 koordinata:

$$\{\delta\} = \{u_1 \vartheta_1 | u_2 \vartheta_2 | u_3 w_3 \vartheta_3\}^T \quad (43)$$

Na osnovu gore izloženog, saglasno vektoru (43), korišćenjem matrice (25), kao i relacija (19) i (20), dobija se *matrica krutosti* za ovaj slučaj diskretizacije:

$$[K] = \frac{\pi}{64} EL_1 [k_{ij}]_{7 \times 7} \quad (44)$$

Inerciona matrica dobija se, sličnim razmatranjem, iz (26)

$$[M] = \frac{1}{420} \frac{\pi}{4} \rho L_1^3 [m_{ij}]_{7 \times 7} \quad (45)$$

Matrica prigušenja, saglasno vezi (42) i dobijenoj matrici (45) ima oblik

$$[B] = \frac{\omega_0^2}{4\pi^2} \delta^2 [M] \quad (46)$$

Različite vrednosti logaritamskog dekrementa preuzete su iz [7] i navedene ranije.

3.1.1 Oscilovanje bez prigušenja

Frekventna jednačina (31) za matrice (44) i (45) daje spektar sopstevnih kružnih frekvencija, koje je tabelarno prikazan u Tabeli T.1

Tabela T.1

ω_1	10055.620
ω_2	15837.716
ω_3	28463.863
ω_4	62173.581
ω_5	179170.061
ω_6	211645.103
ω_7	583721.140

Jedinica ω_i je [s^{-1}].

Najniža vrednost kružne frekvencije je $\omega_0 = \omega_1$. U tabeli T.5 prikazane su četiri najniže vrednosti frekvencija računane prema izrazu

$$f_i = \omega_i / 2\pi, \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

3.1.2 Oscilovanje sa prigušenjem

Kada se u materijalu javlja prigušenje tada se, korišćenjem matrica (44), (45) i (46), pomoću frekventne jednačine (40) oscilovanja glavnog vretena, za različite vrednosti logaritamskog dekrementa, dobijaju sledeći spektar rezonantnih kružnih frekvencija:

Tabele T.2

	$\delta=0.023$	$\delta=0.130$	$\delta=0.215$
Ω_1	10055.552	10053.467	10049.731
Ω_2	15837.637	15836.349	15833.977
Ω_3	28463.840	28463.104	28461.784
Ω_4	62173.570	62173.233	62172.629
Ω_5	179170.057	179169.940	179169.730
Ω_6	211645.099	211645.000	211644.823
Ω_7	583721.137	583721.103	583721.038

Jedinica Ω_i je [s^{-1}]

3.1.2.1 Uticaj prigušenja

Dobijene vrednosti kružnih frekvencija u tabeli T.2 malo su niže od vrednosti u tabeli T.1, koje se odnose na oscilovanje bez prigušenja. Ocena uticaja prigušenja na veličinu kružne frekvencije vrši se pomoću količnika (41). Smenom matrica (44), (45) i matrice (46) za, ovde uzete, tri različite vrednosti logaritamskog dekrementa u količnik (41) dobijaju se vrednosti:

$$\text{za } \delta = 0.023 \text{ je } Q = 370,345 \cdot 10^{-9} \ll 1$$

$$\text{za } \delta = 0,130 \text{ je } Q = 8,732 \cdot 10^{-9} \ll 1$$

$$\text{za } \delta = 0,215 \text{ je } Q = 23,884 \cdot 10^{-9} \ll 1$$

Dobijeni količnici su vrednosti mnogo manje od 1, tako da se ovde, sa ovako definisanom matricom prigušenja, radi o *malom prigušenju* oscilovanja [2].

3.2 DISKRETIZACIJA SA ŠEST KONAČNIH ELEMENATA

U ovom slučaju će se glavno vreteno diskretizovati sa $(n)=6$ konačnih elemenata (v. sl. 5). Konačni elementi su označeni sa (1), (2), (3), (4), (5), (6). Čvorovi su numerisani brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Prema sl. 5 je

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6 = 0,050 \text{ [m]}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = 0,050 \text{ [m]} \quad D_6 = 0,075 \text{ [m]}$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0,025 \text{ [m]} \quad d_6 = 0,035 \text{ [m]}$$

Koristeći Napomenu I iz odeljka 2.4.2, izraz (11) daje vrednosti $l_0=1, l_1=l_2=l_3=l_4=l_5=1, l_6=0$.

Bezdimenzijske veličine definisane sa (12) i (14) ovde su :

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0,9375; \quad p_6 = 4,8224$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0,75; \quad q_6 = 1,76$$

Glavno vreteno je elastično uležišteno u čvorovima 1 i 6. Krutosti ovih ležišta su $c_1=4,3 \cdot 10^8 \text{ [N/m]}$ i $c_2=6,8 \cdot 10^8 \text{ [N/m]}$. Broj stepeni slobode, ovako diskretizovanog, glavnog vretena računa se primenom razmatranja iz odeljka 2.5. Kako je $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 0$ i $(n) = 6$ biće

$$3n+3 - (n_1 + n_2 + 2n_3) = 19.$$

Prema tome broj stepeni slobode je 19. Ukupni vektor pomeraja (24), na osnovu ovoga ima 19 koordinata:

$$\{\delta\} = \{u_1 \vartheta_1 | u_2 w_2 \vartheta_2 | \dots | u_6 \vartheta_6 | u_7 w_7 \vartheta_7\}^T \quad (47)$$

Sada, matrica (25) i opšte relacije (19) i (20) saglasno koordinatama vektora (47), daje *matricu krutosti*

$$[K] = (\pi/64) E L_1 [k_{ij}]_{19 \times 19} \quad (48)$$

Inerciona matrica se dobija na osnovu matrice (26), saglasno gornjoj matrici i glasi : (49)

$$[M] = (\pi/1680) \rho L_1 [m_{ij}]_{19 \times 19}$$

Matrica prigušenja, korišćenjem veze (42), vezana je sa matricom (48), tj. glasi

$$[B] = (\omega_0^2 / \pi^2) \delta^2 [M] \quad (50)$$

Za logaritamski dekrement uzete su, kao i u odeljku 3.1, tri vrednosti.

3.2.1 Oscilovanje bez prigušenja

Pomoću matrica (48) i (49) formiraće se frekventna jednačina (31), koja ima spektar sopstvenih kružnih frekvencija, prikazanih u tabeli T.3.

Tabela T.3

ω_1	9476.890	ω_{11}	222937.671
ω_2	15665.895	ω_{12}	263794.723
ω_3	27244.270	ω_{13}	312283.458
ω_4	47556.243	ω_{14}	322242.296
ω_5	66069.438	ω_{15}	384660.952
ω_6	80685.125	ω_{16}	480277.835
ω_7	127621.896	ω_{17}	595511.249
ω_8	138611.913	ω_{18}	692313.843
ω_9	179170.061	ω_{19}	739764.495
ω_{10}	183654.087		

Jedinica ω_i je [s⁻¹].

Najniža vrednost kružne frekvencije je $\omega_0 = \omega_1$. U tabeli T.5 prikazane su vrednosti frekvencije računane prema izrazu :

$$f_i = \omega_i / 2\pi \text{ [Hz]; } i = 1, 2, \dots, 19.$$

3.2.2 Oscilovanje sa prigušenjem

Uvodjenjem prigušenja u materijal dolazi se do frekventne jednačine (40), koja za matrice (48), (49) i (50), za tri različite vrednosti logaritamskog dekrementa, kao i u odeljku 3.1.2, ima spektar rezonantnih kružnih frekvencija dat u tabeli T4.

Tabela T.4

	$\delta = 0.023$	$\delta = 0.130$	$\delta = 0.215$
Ω_1	9476.787	9474.821	9471.300
Ω_2	15665.857	15664.668	15662.538
Ω_3	27244.248	27243.654	27242.340
Ω_4	47556.231	47555.839	47555.138
Ω_5	66069.429	66069.148	66068.643
Ω_6	80685.118	80684.887	80684.474
Ω_7	127621.892	127621.746	127621.484
Ω_8	138611.909	138611.774	138611.534
Ω_9	179170.058	179169.953	179169.767
Ω_{10}	183654.084	183653.982	183653.800
Ω_{11}	222937.668	222937.585	222937.453
Ω_{12}	263794.726	263794.655	263794.525
Ω_{13}	312283.457	312283.397	312283.290
Ω_{14}	322242.294	322242.236	322242.132
Ω_{15}	384660.951	384660.902	384660.815
Ω_{16}	480277.834	480277.758	480277.726
Ω_{17}	595511.248	595511.217	595511.161
Ω_{18}	692313.843	692313.816	692313.768
Ω_{19}	739764.494	739764.469	739764.424

Jedinica Ω_i je [s⁻¹].

3.2.2.1. Uticaj prigušenja

Vrednosti kružnih frekvencija u tabeli T.4 ne razlikuju se mnogo od kružnih frekvencija neprigušenih oscilacija, koje se nalaze u tabeli T.3. Uticaj prigušenja se određuje pomoću količnika (41). Matrice (48), (49) i (50), za različite vrednosti logaritamskog dekrementa, daju količniku normi matrica (41) sledeće vrednosti:

$$\text{za } \delta = 0,023 \text{ je } Q = 0,257 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

$$\text{za } \delta = 0,130 \text{ je } Q = 262,432 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

$$\text{za } \delta = 0,215 \text{ je } Q = 1963,355 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

Dobijene vrednosti opet su mogo manje od 1, tako da se radi o *malom prigušenju* pri oscilovanju razmatrane aksijalne strukture. Dobijene vrednosti su veće od vrednosti dobijenih u 3.1.2.1. Ovo se objašnjava većom tačnošću usled povećanja broja konačnih elemenata.

Napomena IV: Za izračunavanje vrednosti matrica, sopstevnih vrednosti i normi matrica korišćene su mogućnosti programskog sistema MATLAB [12].

Pored prethodno izloženog u cilju verifikacije predloženog matematičkog modela izvršeno je izračunavanje sopstevnih vrednosti korišćenjem drugih programskih paketa. Ovi rezultati su prikazani u tabeli T.5. Prema [6] izvršeno je izračunavanje pri diskretizacija takodje sa dva i šest konačnih elemenata, pri čemu se napominje da se radi o vrlo sličnom matematičkom modelu (koriste se matrice krutosti konačnog elementa oblika grede i inerciona matrica), ali se ne može uzeti u obzir trenje na ovakav način kako je to u radu izloženo. Prema [10] radi se o dinamičkom modelu baziranom na koncentrisanim masama. Prikazani rezultati ukazuju, u ovom slučaju, na vrlo veliki uticaj finoće diskretizacije na konačne elemente. I u ovom slučaju matrica krutosti se računa za konačne elemente oblika grede. Uticaj prigušenja se takodje ne može na ovaj način uzeti u obzir.

Tabela T.5

Sopstevne frekvencije [Hz]	Prema metodologiji izloženoj u radu								Prema [6] (inerciona matrica grede)		Prema [10] (metod koncentrisanih masa)	
	bez prigušenja		sa prigušenjem						bez prigušenja		bez prigušenja	
	2 konačna elementa	6 konačnih elemenata	2 konačna elementa			6 konačnih elemenata			2 konačna elementa	6 konačnih elemenata	2 konačna elementa	6 konačnih elemenata
			2,3 %	13 %	21,5 %	2,3 %	13 %	21,5 %				
1.	1600,40	1508,28	1600,39	1600,06	1599,46	1508,27	1507,96	1507,40	1625,2	1557,79	805	1470
2.	2520,65	2493,30	2520,64	2520,63	2520,06	2493,29	2493,31	2492,77	2570	2555,51	1240	2410
3.	4530,16	4336,06	4530,16	4530,04	4529,83	4336,06	4335,95	4335,75	4544	4606,2	2580	4120
4.	9895,23	7569,81	9895,23	9895,18	9895,08	7568,80	7568,75	7568,63	11407	8693,52	3010	6350

4.0 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Na osnovu prikazanih rezultata može se zaključiti da je uticaj unutrašnjeg trenja u materijalu, bez obzira na njegovu veličinu iskazanu logaritamskim dekrementom oscilovanja, vrlo mali. Ovo je verifikovano uslovom (41), koji sadrži norme matrica krutosti, inercionih matrica i matrica prigušenja. Matrica prigušenja je uvedena tako da je proporcionalna inercionoj matrici. Ovo znači da su koeficijenti prigušenja jednaki za sve normalne koordinate. Finija diskretizacija razmatrane aksijalne strukture konačnim

elementima u obliku grede pokazuje veći uticaj prigušenja na vrednosti frekvencija oscilovanja.

Dalji cilj istraživanja oscilovanja sa prigušenjem u materijalu aksijalne strukture, diskretizovane konačnim elementima u obliku grede, jeste proučavanje prinudnih oscilacija i posmatranje oscilovanja kada se matrica prigušenja uvodi na drugi način.

5.0 LITERATURA

- [1] ASTAŠEV, K.V.: Dissipativnye karakteristiki mehaničeskikh sistem, Osnovnye ponjatija i opredelenija, Vibracii v tehniki, tom 6, str.128- 134, Mašinstroenie, Moskva, 1981.
- [2] BOLOTIN, V.V., ŽINŽER, N.I.: Nekonservativnye avtonomnye sistemy s postojanymi parametrami, Ustojčivost linejnyh sistem, Vibracii v tehniki, tom 1, str.89- 100, Mašinstroenie, Moskva, 1978.
- [3] DUKOVSKI, L.J.: Vlijatelni golemini vrz statičkite i dinamičkite karakteristiki na glavnite vretena kaj metalorezačkite mašini, doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Skoplje, 1984.
- [4] GATALO, R., ..., ZELJKOVIĆ, M., MILISAVLJEVIĆ, B., i dr. : Fleksibilni tehnološki sistemi i fleksibilne tehnologije za obradu rezanjem , kao osnove za razvoj kompjuterom integrisane proizvodnje, naučnoistraživački projekat, Institut za proizvodno mašinstvo FTN, Novi Sad, (projekat u toku)
- [5] KALAJDŽIĆ, M. : Metod konačnih elemenata, Institut za alatne mašine i alate, Beograd, 1978.
- [6] KALAJDŽIĆ, M.: MEKELBA III - Metod konačnih elemenata u BASUC-u, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [7] PISARENKO, S. G.: Dissipativnye karakteristiki mehaničeskikh sistem, Dempfirujuščie svojstva konstrukcionnyh materialov, Vibracii v tehniki, tom 6, str. 134- 141, Mašinstroenije, Moskva, 1981..
- [8] STANKOVIĆ, L.J., USKOKOVIĆ, Z.: PC MATLAB sa elementima DOS-a, Epsilon-Titograd, Montex-Nikšić, 1991.
- [9] THOMSON, W.T.: Theory of vibration with aplications, George Allen & Unwin, London, 1984.
- [10] ZELJKOVIĆ, M.: Prilog primeni savremenih metoda za projektovanje mašina alatki na bazi računarske i eksperimentalne identifikacije glavnih vretena, magistarski rad, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1984.
- [11] ZELJKOVIĆ, M.: Sistem za automatizovano projektovanje i identifikaciju ponašanja sklopa glavnog vretena mašina alatki, doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, (radni materijal)
- [12] PC-MATLAB User's Guide, The MathWorks, Inc., 1987.