https://doi.org/10.24867/JPE-1986-03-069

UDK 621.7

YU ISSN 0352-1095

ZBORNIK RADOVA INSTITUTA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO

Godina 3 Novi Sad, 1986. god. Broj 3

ORIGINALNI NAUČNI RAD

R.Kovač*

REŠENJE MATEMATIČKOG MODELA PROCESA ZAPREMINSKOG OČVRŠĆAVANJA ODLIVKA VARIJACIONOM METODOM

Rezime

U radu je primenjen varijacioni metod Galerkina na matematički model procesa zapreminskog očvršćavanja odlivka, radi iznalaženja temperaturnog polja odlivka. Dobijeno rešenje matematičkog modela je u analitičko-funkcionalnom obliku, pogodnom za analizu uticaja parametara procesa na profil temperaturnog polja i tok procesa. Relativna količina čvrste faze u matematičkom modelu definisana je kinetičkom jednačinom kristalizacije Kolmogorova.

SOLUTION OF MATHEMATICAL MODEL OF VOLUME SOLIDIFICATION IN CASTINGS USING VARIATION METHOD

Summary

The Galerkin method of variation is applied to solve mathematical model of volume solidification in infinite slab and to determine temperature field in casting. The solution of mathematical model is given in analytical-functional form, which is convinient for analysis of process. Relative fraction of solid state in mathematical model is defined by chinetical equation of solidification given by Kolmogorov.

* Kovač dr Risto, dipl.ing, vanr.prof., Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu. Institut za proizvodno mašinstvo, 21000 Novi Sad, V.Perića-Valtera 2.

1. UVOD

Matematički model procesa zapreminskog očvršćavanja odlivka čini parcijalna diferencijalna jednačina Furijea sa toplotnim izvorima i jednačine koje opisuju početne i granične uslove. Ovako sačinjen matematički model je uprošćen, jer ne opisuje sve pojave koje prate proces očvršćavanja odlivka. Sačinjavanje matematičkog modela koji bi potpunije opisivao proces je otežano usled nemogućnosti matematičkog opisivanja nekih pojava (filtracija, izdvajanje gasa i dr.). Tako sačinjen matematički model bio bi vrlo težak za rešavanje ili se uopšte ne bi mogao rešiti.

Rešenje matematičkog modela predstavlja funkcija $T(x,\tau)$ i naziva se temperaturno polje odlivka. Od značaja je u kakvom obliku je izražena funkcija $T(x,\tau)$, tj. da li je takav oblik funkcije pogodan za vršenje odredjenih analiza. Za inženjersku praksu pogodno je rešenje matematičkog modela dati u analitičko-funkcionalnom obliku. Dobijanju rešenja matematičkog modela (1)-(4) može se prići na dva načina: da se, matematički gledano, dobije tačno rešenje i da se dobije aproksimativno rešenje. Tačno rešenje matematičkog modela kakav je predstavljen jednačinama (1)-(4) zasniva se na korišćenju integralne transformacije (Laplasove). Rešenje se dobija u vidu beskonačnih funkcionalnih redova u kojima figurišu transcedentne funkcije, te takva rešenja nisu pogodna za vršenje analiza procesa.

Za praksu veći značaj imaju aproksimativna rešenja ako su u takvom obliku da je sa njima lako operisati pri vršenju odredjenih analiza ili, pak, odredjivanju nekih parametara procesa. Aproksimativna rešenja su po tačnosti vrlo bliska tačnim rešenjima, jer se i kod tačnih rešenja ide na nekoliko članova reda, a ne od $0-\infty$. Takodje treba imati u vidu da se tačna rešenja, kao i aproksimativna, dobijaju iz uprošćenog matematičkog modela.

2. MATEMATIČKI MODEL

U procesu zapreminskog očvršćavanja na zidu odlivka ne obrazuje se čvrsta kora, već je čvrsta faza ravnomerno raspoređjena po preseku zida odlivka. Strogo govoreći, proces zapreminskog očvršćavanja odlivka u kalupu ne ostvaruje se, jer rastop u površinskim slojevima zida odlivka uvek će imati nižu temperaturu nego u centralnoj osi. U površinskim slojevima zida odlivka počinje proces obrazovanja čvrste faze (kristala) i ranije se završava nego u površinskim slojevima.

Matematički model procesa zapreminskog očvršćavanja odlivka oblika beskonačne ploče odredjen je jednačinama (1)-(4) |1|.

$$c_2\rho_2 \cdot \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right) + L_2\rho_3 \frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial \tau} \tag{1}$$

sa početnim uslovom

$$T(x,0) = T_{kr} \tag{2}$$

graničnim uslovom u centru zida odlivka

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

i graničnim uslovom na površini zida odlivka

$$-\lambda_2 \frac{\partial T(X,\tau)}{\partial x} = \alpha|T(X,\tau)-T_s| \tag{4}$$

gde je c_2 - specifična toplota, a L_2 - specifična toplota kristalizacije u dvofaznoj oblasti. Gustina dvofazne oblasti označena je sa ρ_2, a čvrste faze sa ρ_3. Toplotna provodljivost dvofazne oblasti je λ_2, a α predstavlja koeficijent prelaza toplote sa odlivka na kalup. Temperatura kristalizacije označena je T_{kr}, a temperatura sredine u kojoj se odlivak hladi sa T_s.

Matematički model procesa zapreminskog očvršćavanja odlivka (1)-(4) rešiće se uz sledeća uprošćenja: toplotno-fizičke osobine materijala odlivka u dvofaznoj oblasti su konstantne; gustine i tečne i čvrste faze su jednake; rastop se u kalup uliva bez pregrevanja; u momentu početka kristalizacije u jedinici zapremine rastopa prisutno je N-centara kristalizacije, čiji se broj u daljem periodu hladjenja rastopa ne povećava. Linearna brzina rasta kristala odredjena je izrazom $W=k_0(T_{kr}-T(x,\tau))$, gde je k_0 - kinetički koeficijent brzine rasta kristala |1|.

Rešenje matematičkog modela (1)-(4) zahteva poznavanje funkcije $\eta(x,\tau)$. Toplota kristalizacija, koja se oslobadja u dvofaznoj oblasti, proporcionalna je funkciji $\eta(x,\tau)$ i rasprostire se u okolini tačke izdvajanja. Tada se može pretpostaviti da funkcija $\eta(x,\tau)$ zavisi od prethladjenja, tj.

$$\eta(x,\tau) = \eta(\Delta T) = \eta|T_{kr}-T(x,\tau)|.$$

Kako $\eta(x,\tau)$ predstavlja relativnu količinu čvrste faze, to se ova funkcija, za slučaj zapreminskog očvršćavanja odlivka, može iskazati kinetičkom jednačinom Kolmogorova |1|

$$\eta(x,\tau) = 1-\exp\{-\gamma N k_0^3 |\int_0^\tau (T_{kr}-T(x,\tau))d\tau|^3\} \qquad (5)$$

gde je γ - oblik rasta kristala, a N - broj centara kristalizacije.

Vrednost eksponenta u jednačinu (5) označiće se novom promenljivom β, u obliku

$$\beta^3 = \gamma N k_0^3 |\int_0^\tau (T_{kr}-T(x,\tau)d\tau|^3 \qquad (6)$$

Jednačina (5) sada ima oblik

$$\eta(x,\tau) = 1-\exp(-\beta^3) \qquad (7)$$

Funkcija $\eta(x,\tau)$ predstavlja odnos čvrste faze V i tečne faze V_0, tj. $\eta(x,\tau)=V/V_0$.

Proces očvršćavanja odlivka može se smatrati završenim kada u toplotnoj osi zida odlivka relativna količina čvrste faze $\eta(x,\tau)$ dostigne 99% |2|. Koristeći ovaj uslov u cilju iznalaženja vrednosti β, na završetku procesa očvršćavanja, prethodni izraz dobija oblik odakle se dobije vrednost promenljive $\beta=1,66\approx1,7$ na završetku procesa očvršćavanja. Vrednost funkcije β kreće se od 0 (nule) na početku procesa očvršćavanje do 1,7 na završetku procesa očvršćavanja. Jednačina (6) može se prikazati grafički, tako da ordinatu čini funkcija $\eta(x,\tau)$ (čija se vrednost kreće od nule,na početku procesa procesa očvršćavanja, do jedinice na završetku procesa) a apscisu osu funkcija β.

Na osnovu tog grafičkog prikaza može se funkcija $\eta(x,\tau)$ iskazati u obliku

$$\eta(x,\tau) = tg\alpha\cdot\beta = m\cdot\beta(x,\tau) \qquad (9)$$

gde je m - tangens ugla izmedju funkcija $\eta(x,\tau)$ i $\beta(x,\tau)$. Unošenjem jednačine (9) u (1), pri napred navedenim uprošćenjima, jednačina (1) glasi

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau} = a_2 \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{L_2}{c_2} m \frac{\partial\beta(x,\tau)}{\partial\tau} \qquad (10)$$

iz jednačine (6) je

$$\frac{\partial\beta(x,\tau)}{\partial\tau} = (\gamma N)^{1/3} k_o(T_{kr}-T(x,\tau)) \qquad (11)$$

Radi lakšeg iznalaženja rešenja matematičkog modela (1)-(4), preći će se na bezdimenzione veličine. Po unošenju jednačine (11) u jednačinu (10) i nakon niza sredjivanja, matematički model (1) do (4) u bezdimenzionom obliku glasi

$$\frac{t(y,Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 t(y,Fo)}{\partial y^2} - K_1K_2m\cdot t(y,Fo) + K_1K_2m \qquad (10)$$

Početni uslov (2) i granični uslovi (3) i (4) u bezdimenzionom obliku su:

$$t(y,0) = 1 \qquad (11)$$

$$\partial t(0,Fo) = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial t(1,Fo)}{\partial y} = -Bit(1,Fo) \qquad (13)$$

Jednačine (10)-(13) prikazuju matematički model (1)-(4) u bezdimenzionom obliku. Bezdimenziona veličina su:

$y = x/X$, gde je X - polovina debljine zida odlivka

$$t(y,Fo) = \frac{T(x,\tau)-T_s}{T_{kr}-T_s}$$ - bezdimenziona temperatura

$$Bi = \frac{\alpha \cdot X}{\lambda}$$ - kriterij Bio

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{X^2}$$ - kriterij Furije-a

Bezdimenzioni kriteriji K_1 i K_2 odredjeni su izrazima

$$K_1 = (\gamma N)^{1/3} k_o (T_{kr}-T_s) \frac{X^2}{a} \tag{14}$$

$$K_2 = \frac{L_2}{c_2(T_{kr}-T_s)} \tag{15}$$

Pri rešavanju matematičkog modela koristiće se metod Galerkina

3. REŠENJE MATEMATIČKOG MODELA

Rešenje matematičkog modela (10)-(13) obaviće se primenom varijacionog principa. Profil temperaturnog polja zida odlivka pretpostaviće se u obliku

$$t(y \cdot Fo) = (h-y^2) f(Fo) \tag{16}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po y dobija se

$$\frac{\partial t(y,Fo)}{\partial y} = -2yf(Fo) \tag{17}$$

čime je pri $y=0$ zadovoljen granični uslov (12). Da bi se zadovoljio granični uslov (13) jednačina (16) će se diferencirati po y i pri $y=1$ izjednačiti sa graničnim uslovom (13), tj.

$$-2f(Fo) = -Bi(h-1)f(Fo)$$

odakle se dobije

$$h = \frac{Bi + 2}{Bi} \qquad (18)$$

Koristeći Galerkinov metod dobije se

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial t(y \cdot Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 t(y,Fo)}{\partial y^2} - K_1 K_2 m(1-t(y,Fo)) \right| \frac{\partial t(y,Fo)}{\partial f} dy=0 \qquad (19)$$

Vrednosti funkcija koje sadrži jednačina (19) odrediće se iz (16)

$$\frac{\partial t(y,Fo)}{\partial Fo} = (h-y^2)\dot{f}(Fo)$$

$$\frac{\partial^2 t(y,Fo)}{\partial y^2} = -2f(Fo) \qquad (20)$$

$$\frac{\partial t(y,Fo)}{\partial f(Fo)} = (h-y^2)$$

Unošenjem ovih vrednosti u jednačinu (19) dobije se

$$\dot{f}\int_0^1 (h-y^2)\,dy + f\int_0^1 |2+K_1K_2m(h-y^2)|(h-y^2)\,dy - K_1K_2m\int_0^1 (h-y^2)\,dy = 0 \qquad (21)$$

Označe li se podintegralne vrednosti sa J_i, $i=1,2,3$, dobije se

$$\dot{f}J_1 + fJ_2 - K_1K_2mJ_3 = 0 \qquad (21)$$

gde je

$$J_1 = \frac{4(2Bi^2 + 10Bi + 15)}{15Bi^2}$$

$$J_2 = \frac{4|(2K_1K_2m+5)Bi^2+(10K_1K_2m+15)Bi+15K_1K_2m|}{15Bi^2} \qquad (22)$$

$$J_3 = \frac{2(Bi+3)}{3Bi}$$

iz jednačine (22)

$$\dot{f} + \frac{J_2}{J_1} f = K_1 K_2 m \frac{J_3}{J_1} \tag{23}$$

Rešenjem ove jednačine po f dobije se

$$f = K_1 K_2 m \frac{J_3}{J_2} + \left(\frac{J_3}{J_1} - \frac{J_3}{J_2} K_1 K_2 m\right) e^{-\frac{J_2}{J_1} Fo} \tag{23}$$

Unošenjem vrednosti J_1, J_2 i J_3 iz (22) u jednačinu (23) a zatim ove u (16), dobije se izraz za temperaturno polje zida odlivka u obliku

$$t(x,Fo) = \left(\frac{Bi+2}{Bi} - y\right) \frac{5Bi(Bi+3)}{2|K_1 K_2 m(2Bi^2+10Bi+15)+5Bi(Bi+3)|} \cdot$$

$$\left\{\frac{5Bi(Bi+3)}{2Bi^2+10Bi+15} \exp\left|-\frac{K_1 K_2 m(2Bi^2+10Bi+15)+5Bi(Bi+3)}{2Bi^2+10Bi+15}\right| F_o + K_1 K_2 m\right\} \tag{24}$$

Jednačina (24) definiše temperaturno polje zida odlivka. Pri odredjivanju temperaturnog polja odlivka datog jednačinom (24) integralna konstanta odredjena je minimizacijom kvadratnog ostatka za Fo=0.

Vrednost m u jednačini (24) odredjuje se iz jednačine Kolmogorova, prema |1|. Ako se kinetička jednačina Kolmogorova prikaže grafički, a zatim izvrši linearizacija, veličina m ima konstantnu vrednost i iznosi 0,59 |2|. Bezdimenzioni kriterij K_2 lako se odredjuje za odredjenu leguru. Metod odredjivanja približne vrednosti kriterija K_1 dat je u |4|.

4. ZAKLJUČAK

Iz napred izloženog mogu se izvesti sledeći zaključci:

1. Varijacioni metod primenjen na rešenje matematičkog modela (1)-(4) daje približno rešenje temperaturnog polja zida odlivka.

2. Temperaturno polje odlivka iskazano je u analitičko-funkcionalnom obliku, pogodnom za analizu uticaja pojedinih parametara na profil polja.

3. Izraz za temperaturno polje zida odlivka oblika ploče opšteg je karaktera.

4. Grafički prikaz temperaturnog polja zida odlivka može se dati ako su poznate veličine: karakteristična dimenzija zida odlivka X, koeficijent prelaza toplote sa odlivka na kalup α i toplotno-fizičke veličine legure c_2, λ_2, L_2.

5. LITERATURA

|1| Balandin,G.F, Vorobev,I.L: Metod analiza obemnogo zatverdevanija. Izvestija vuzov. Mašinostroenie 1972. No-9.

|2| Balandin,G.F: Formirovanije kristalličeskogo stroenija otlivak. Moskva, 1973.

|3| Kovač,R.: Toplotni procesi pri formiranju odlivka. Magistarski rad, Novi Sad, 1975.

|4| Kovač,R.: Odredjivanje brzine rasta kristala računskim putem. V JUGOSLOVENSKI MEDJUNARODNI SIMPOZIJUM O ALUMINIJU - V.JUGAS, Mostar, 1986.

|5| Bačlić,B.: Proučavanje nelinearnih nestacionarnih simultanih fenomena prenosa varijacionim metodama. Magistarski rad, Novi Sad, 1974.

|6| Kozdoba,L.A.: Metody rešenija nelinejnyh zadač teploprovodnosti. Moskva, 1975.