UDK 621.7 YU ISSN 0354-6446
Časopis PROIZVODNO MAŠINSTVO
Godina 11 Novi Sad, 1994. god. Broj 1-2

https://doi.org/10.24867/JPE-1994-11-243

M. Pavišić, A. Sedmak

PRIMENA PARAMETARA VREMENSKI ZAVISNE MEHANIKE LOMA NA ZAVARENE SPOJEVE

Ključne reči:
- **mehanika loma zavarenih spojeva**
- **stacionarno puzanje**
- **nestacionarno puzanje**
- **metoda konačnih elemenata**
- **C* integral**

Key words:
- **weldment fracture mechanics**
- **stationary creep**
- **non-stationary creep**
- **finite element method**
- **C* integral**

Adresa autora:
mr Mirko Pavišić, asistent
dr Aleskandar Sedmak, docent
Mašinski fakultet, 27. Marta 80, Beograd

REZIME

U radu je formulisan integralni izraz, nezavisan od putanje, za koji je pokazano da je važeći parametar vremenski zavisne mehanike loma zavarenih spojeva. Integralni izraz se sastoji od linijskog člana, oblika C integrala, površinskog člana koji uzima u obzir nestacionarnost problema i još jednog linijskog člana, koji uzima u obzir heterogenost zavarenog spoja. U slučaju stacionarnog problema površinski integral postaje nula, a u slučaju homogenog materijala i dodatni linijski član postaje nula, pa se integralni izraz svodi na C* integral. Primenom metode konačnih elemenata ovako formulisan integralni izraz je određen na primeru zavarenog spoja.*

TIME DEPENDENT FRACTURE MECHANICS PARAMETER FOR WELDMENTS

SUMMARY

A path indendent integral expression has been introduced and proved to be valid time depenent fracture mechanics parameter for weldments. The integral expression comprises line integral, resembing C integral, surface integral wich takes into account for non-stacionary problems, and another line integral, which takes into account for the weldment heterogeneity. In the case of a stationary problem surface integral vanishes, as does the additional line integral for a homogeneous material, reducing the integral expression to the C* integral. The complete integral expression has been calculated for a weldment, using the finite element method.*

UVOD

Poslednjih godina je sve intenzivnije istraživanje konstrukcija sa prslinama koje rade na povišenim temperaturama, odnosno u uslovima puzanja. Cilj tih istraživanja je da se utvrde mehanizmi nastanka i rasta prslina, i predvidi preostali vek konstrukcija. U tom cilju se primenjuju osnovni koncepti vremenski zavisne mehanike loma, zasnovani na integralima nezavisnim od putanje, pomoću kojih se mogu opisati zavisnost brzine rasta prsline od geometrije, materijala i opterećenja konstrukcije. Osim toga, primenom integrala nezavisnih od putanje (pod uslovima u kojima oni važe) moguće je definisati naponska i deformacijska polja oko vrha prsline, s obzirom na njihovu nezavisnost od veličine i geometrije konstrukcije. Na taj način je ustanovljena procedura predviđanja preostalog veka konstukcije sa prslinom.

Ovakva procedura je od posebnog značaja za zavarene konstrukcije, jer se problemi njihove eksploatacije na povišenim temperaturama često svode na otpornost zavarenih spojeva na nastanak i rast prslina. Poznati su mnogobrojni primeri havarija i lomova zavarenih spojeva parovoda u termoelektranama. Dva su osnovna uzroka koja čine zavarene spojeve kritičnim mestima: greške tipa mikroprslina i primese tipa nečistoća ili legirajućih elemenata na liniji stapanja. Kako mikroprsline, tako i primese, predstavljaju inicijalna mesta za razvoj makro prsline u uslovima puzanja, čime znatno smanjuju period koji je u "zdravom" materijalu za to potreban.

Osnovi parametar vremenski zavisne mehanike loma je C* integral, definisan kao uopštenje J integrala na stacionarne probleme puzanja. Pri tome treba imati u vidu da je, s jedne strane, heterogenost zavarenih spojeva značajna prepreka primeni integrala nezavisnih od putanje, jer je njihovo važenje uslovljeno homogenošću materijala, /1/, a s druge strane, da C* integral ne važi za nestacionarne probleme puzanja. Stoga je u ovom radu uvoden modifikovani C* integral, nezavisan od putanje za zavarene spojeve u uslovima stacionarnog puzanja, kao i C(t) integral, koji važi u uslovima nestacionarnog puzanja i koji se ta-

Rad je saopšten na Međunarodnom savetovanju ZAVARIVANJE '94 AKTUELNI TRENDOVI U ZAVARIVANJU I SRODNIM POSTUPCIMA, Novi Sad, oktobar 1994.

kođe može modifikovati u cilju primene na zavarene spojeve.

C^* integral je u ovom radu određivan numerički, metodom konačnih elemenata, što uključuje rešavanje jednačina ravnoteže, uzimajući u obzir jednačine kompatibilnosti i relacije napona i deformacije, odnosno modeliranje ponašanja materijala pri puzanju.

MATEMATIČKO MODELIRANJE PUZANJA

Matematičko modeliranje procesa puzanja, zanemarujući primarnu i tercijarnu oblast puzanja, se u slučaju jednodimenzijskih problema zasniva na Nortonovom zakonu:

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+B\cdot\sigma^{n} \tag{1}$$

gde " $\cdot$ " označava izvod po vremenu (odnosno brzinu), ε deformaciju, σ napon, E Jangov modul elastičnosti, a B i n su karakteristike puzanja materijala. Izraz (1) definiše brzinu deformacije puzanja kao zbir linearno elastične ε/E i nelinearne komponente $B\sigma^n$ brzine deformacije u sekundarnoj oblasti puzanja. Nortonov zakon je ustvari analogon Ramberg-Ozgudovoj relaciji koja opisuje jednoosnu zavisnost elasto-plastičnog napona i deformacije:

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\frac{\alpha\varepsilon_e}{R_e^N}\cdot\sigma^N \tag{2}$$

gde su ε_e i R_e deformacija i napon tečenja, a α i N karakteristike plastičnosti materijala.

U slučaju višeosnog puzanja matematičko modeliranje je moguće jedino ako su ispunjeni uslovi da se problem razmatra analogno problemu elastoplastičnog ponašanja materijala. Radi se o sledećim uslovima:

- jednačina stanja (zavisnost brzine deformacije od napona) treba da se svede na Nortonov zakon u slučaju jednoosnog puzanja;
- jednačina stanje ne treba da obuhvata zavisnost od hidrostatičkog napona, što je eksperimentalno poznata i dokazana činjenica;
- model treba da predvidi konstantnost zapremine, kao što je iskustveno utvrđeno
- glavni pravci napona i deformacije treba da se podudaraju kod izotropnih materijala.

U slučaju da su svi navedeni uslovi ispunjeni, brzina deformacije (data u tenzorskom obliku, preko Dekartovih koordinata) se može izraziti kao:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\dot{s}_{ij}+\frac{1-2\nu}{3E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\frac{3}{2}B\sigma^{n-1}s_{ij} \tag{3}$$

gde su $s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ devijatorske komponente napona, koje se koriste umesto komponenti napona σ_{ij} da bi se uzela u obzir nezavisnost brzine puzanja od hidrostatičkog naponskog stanja, σ efektivni napon koji prevodi višeosni problem na jednoosni, ν Poasonov koeficijent, a δ_{ij} Kronekerov simbol. Da bi se problem puzanja korektno postavio u okvirima mehanike kontinuuma, treba uzeti u obzir i jednačine ravnoteže, kao i uslove kompatibilnosti za brzine deformacije, /2/.

C^* integral

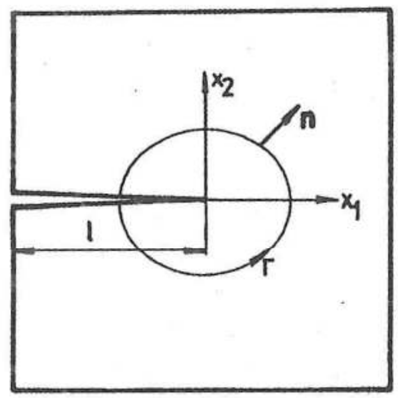
Detaljnijom matematičkom analizom /2/ singularnih polja oko vrha prsline (analogno elastoplastičnom problemu) dolazi se do zaključka da je za n>>1 brzina deformacije oko vrha prsline mnogo veća od linearno elastičnih članova, koji se stoga mogu zanemariti. Prema tome, polja napona i pomeranja oko vrha prsline imaju isti oblik kao izrazi koji opisuju asimptotsko ponašanje deformacijski ojačavajućeg materijala, pa se mogu predstaviti u obliku HRR (Hačinson-Rozengren-Rajs) polja:

$$\sigma_{ij}=\left[\frac{C^*}{BI_n r}\right]^{\frac{1}{1+n}}\bar{\sigma}_{ij}(\theta) \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}=\left[\frac{C^*}{BI_n r}\right]^{\frac{n}{1+n}}\bar{\varepsilon}_{ij}(\theta) \tag{4}$$

gde su $\bar{\sigma}_{ij}(\theta)$ i $\bar{\varepsilon}_{ij}(\theta)$ ugaone raspodele napona i deformacije oko vrha prsline, I_n integralni izraz dat u literaturi /2/, r i θ polarne koordinate sa koordinatnim početkom u vrhu prsline, a C^* integral definisan kao

$$C^*=\int_{\Gamma}\left[W(\dot{\varepsilon}_{ij})dx_2-\sigma_{ij}n_j\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_1}ds\right] \tag{5}$$

gde je Γ putanja integracije oko vrha prsline, x_i Dekartove koordinate sa koordinatnim početkom u vrhu prsline, ui vektor pomeranja, ds element luka na putanji integracije i n_j normala na nju, sl. 1, a sa $W(e_{ij})$ je označena gustina brzine deformacijske energije:



Slika 1.

Ako je opterećenje nezavisno od vremena, onda je takvo i naponsko polje pri $t \Rightarrow \infty$, brzina elastične deformacije je zanemarljiva, a sekundarna oblast puzanja dominantna. Takvo ponašanje materijala se opisuje kao nelinearno viskozno tečenje i ukazuje na činjenicu da je C^* integral nezavisan od putanje, odakle sledi da je C^* integral parametar opterećenja koji određuje jačinu singularnosti polja oko vrha prsline pri stacionarnom puzanju. Ako su ispunjeni svi uslovi koji su pri ovom izvođenju uvedeni onda je C^* integral parametar analogan Rajsovom J integralu, što omogućava primenu bilo kog inženjerskog priručnika u kome su date vrednosti J integrala (npr /3/) za neke karakteristične geometrije. Pri tome treba pomeranje u_i i deformaciju ε_{ij} zameniti njihovim brzinama, a materijalnu konstantu $\alpha\varepsilon_e/R_e^n$ konstantom B.

Analogno Rajsovom J integralu, C* integral može da se fizički tumači kao brzina oslobađanje brzine energije pri jediničnom rastu dužine prsline, ali samo u okvirima stacionarnog puzanja i ostalih uslova pod kojima je uveden. Jasno je da za slučaj nestacionarnog puzanja C* integral nije važeći parametar mehanike loma. Izvođenje odgovarajućeg integralnog izraza, primenljivog na nestacionarne probleme puzanja, je dato u dodatku ovog rada.

Treba uočiti da je C* integral, analogno J integralu, nezavisan od putanje ne samo za homogene materijale, već i za heterogene materijale ako je heterogenost ograničena na pravac upravan na prslinu, /1,4/. Kako, međutim, ovaj uslov nije ispunjen u opštem slučaju kod zavarenih spojeva, neophodno je uvesti modifikovani C* integral koji je nezavisan od putanje i za heterogene materijale.

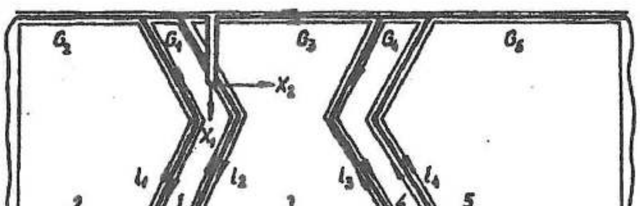
MODIFIKOVANI C* INTEGRAL ZA ZAVARENI SPOJ

Poznato je da se u zavarenom spoju mogu razlikovati bar tri oblasti različitih svojstava: osnovni metal (OM), metal šava (MŠ) i zona uticaja toplote (ZUT). Različita svojstva OM, MŠ i ZUT imaju bitnu ulogu u ponašanju zavarenih spojeva sa prslinom, /5/, posebno u oblastima velikih (visko)plastičnih deformacija. Stoga je bitno formulisati parametar mehanike loma koji je primenljiv za (visko)plastične deformacije multi-materijalnog tela. Imajući u vidu da C* integral gubi svojstvo nezavisnosti od putanje kod materijala koji nisu homogeni u pravcu prsline, neophodno je modifikovati ovaj linijski integral, analogno postupku koji je opisan u radu /6/, a zasnovan je na Gurtinovom radu, /7/.

Polazna osnova je C* integral, sa konturom integracije, datom na sl. 2. Imajući u vidu oznake sa sl. 2, može se pisati:

$$C^* = \int_{G_1}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}\right)ds \qquad (7)$$

$$O = \int_{G_k}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}\right)ds \qquad G_k = G_2, G_3, G_4, G_5 \quad (8)$$



Slika 2 - Kontura integracije

jer samo kontura G obuhvata vrh prsline. Kombinovanjem izraza (6)-(7), dobija se

$$C^* = \int_{G}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}\right)ds - \sum_{1}^{4}\int_{l_k}\left([W]n_1 - \left[\sigma_{ij}n_j\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}\right]\right)ds \quad (9)$$

gde G označava spoljnu konturu (sl. 2), a l_k, k=1,2,3,4, konture duž granica različitih materijala (sl. 2). Uglaste zagrade u drugom članu izraza (9) označavaju tzv. funkciju preskoka, /7/:

$$F] = F^+ - F^- \qquad (10)$$

gde F^+ označava vrednost funkcije sa "pozitivne" strane granice, a F^- vrednost funkcije sa "negativne" strane granice.

Konturni integral, definisan izrazom (9), je nezavisan od putanje i stoga važeći parametar mehanike loma, koji se može identifikovati sa brzinom oslobađanja brzine energije pri jedničnom rastu prsline. Pri tome se drugi integralni izraz u jednačini (9) može smatrati onim delom brzine oslobađanja brzine energije koji je posledica heterogenosti materijala. Na taj način je omogućena analiza ponašanja zavarenih spojeva sa prslinom u smislu primene zakona održanja tipa J integrala.

Numeričko određivanje C* integrala

Numeričko određivanje C* integrala obuhvata rešavanje odgovarajućeg sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina u cilju određivanja polja pomeranja, deformacija i napona, odnosno njihovih brzina, na osnovu čega je moguće izračunati bilo koji linijski integral definisan u zavisnosti od navedenih veličina. S obzirom na komplikovanost problema, kao najefikasnija metoda za njegovo rešavanje se izdvaja metoda konačnih elemenata (MKE).

Imajući u vidu da je detaljni opis procedure rešavanja opisanog problema metodom konačnih elemenata dat u radu /8/, ovde se samo navodi njegov algoritam, u skladu sa programom objavljenim u /9/.

Algoritam rešavanja viskoplastičnog problema primenom MKE

Pri rešavanju problema mora se poći od poznatih početnih uslova u trenutku t = 0 koji predstavljaju rešenje statičkog elastičnog problema. U ovoj fazi su poznate veličine pomeranja d^0, spoljne sile F^0, deformacije ε^0 i napona σ^0, a viskoplastična deformacije $\varepsilon_{vp}^0 = 0$. Zatim se može započeti inkrementalni proces po vremenu da bi se potražilo rešenje korak po korak. Rešavanje problema se odvija po sledećim fazama:

Faza I: Pretpostavlja se da u trenutku $t = t_n$ postoji ravnotežno stanje i da su poznate veličine d^n, σ^n, ε^n, ε_{vp}^n i F^n.

Izračunavaju se sledeće veličine:

- matrica veze deformacije i pomeranja $B^n = B_0 + B_{nL}(d^n)$
- matrica napona $C^n = C^n(\sigma^n, \Delta t_n)$,
- ekvivalentna matrica $\hat{D}^n = (D^{-1} + C^n)^{-1}$,
- matrica tangencijalne krutosti $K_T^n = \int_\Omega \left[B^n\right]^T \cdot \hat{D}^n \cdot B^n \cdot d\Omega$
- viskoplastična deformacija $\dot{\varepsilon}_{vp}^n = \gamma < \Phi > a^n$,

gde je a^n vektor tečenja

Faza 2: Izračunavaju se priraštaji pomeranja Δd^n prema:

$$\Delta d^n = \left[K_T^n\right]^{-1} \cdot \Delta V^n,$$

gde je: $\Delta V^n = \int_\Omega \left[B^n\right]^T \cdot \hat{D}^n \cdot \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t_n \cdot d\Omega + \Delta f^n$

Izračunava se priraštaj napona $\Delta\sigma^n$ prema:

$$\Delta\sigma^n = \hat{D}^n \cdot \left(B^n \cdot \Delta u^n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t_n\right)$$

Faza 3: Određuju se ukupna pomeranja i naponi:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta u^n,\ \sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta\sigma^n$$

Faza 4: Izračunava se brzina viskoplastične deformacije:

$$\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma < \Phi > a^{n+1}$$

Faza 5: Primenjuje se korekcija ravnoteže. Prvo se izračunava B^{n+1} na osnovu pomeranja d^{n+1}., a zatim zamenjuju naponi σ^{n+1} u jednačine ravnoteže i izračunavaju se rezidualne sile prema:

$$\psi^{n+1} = \int_\Omega \left[B^{n+1}\right]^T \cdot \sigma^{n+1} \cdot d\Omega + f^{n+1}$$

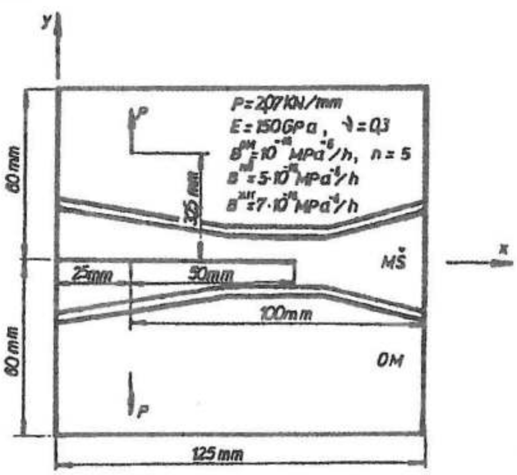
Vektor rezidualnih sila se dodaje vektoru inkrementalnih pseudo opterećenja radi primene u sledećem vremenskom koraku:

$$\Delta V^{n+1} = \int_\Omega \left[B^{n+1}\right]^T \cdot \hat{D}^{n+1} \cdot \dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} \cdot \Delta t_{n+1} \cdot d\Omega + \Delta f^{n+1} + \psi^{n+}$$

Faza 6: Proverava se da li je brzina viskoplastične deformacije e_{vp} dovoljno bliska nuli u svakoj Gausovoj integracionoj tački u razmatranoj strukturi (tj. da li je odstupanje od nule unutar zadate tolerancije). Ako je ovaj uslov ispunjen, dostignuti su stacionarni uslovi i tada se ili prekida rešavanje, ili se primenjuje sledeći priraštaj opterećenja. Ako stacionarni uslovi nisu dostignuti, proračun se vraća u fazu 1 i ponavlja cela procedura za sledeći vremenski korak.

PRIMER

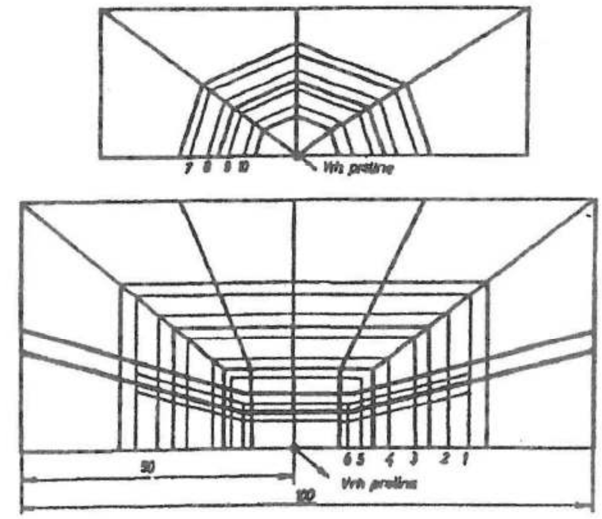
Za ilustraciju navedene procedure rešavanja dvodimenzijskog elastoviskoplastičnog problema multimaterijalnog tela sa prslinom i određivanja modifikovanog C* integrala odabrana je CT epruveta, prikazana na sl. 3. Pri tome je pretpostavljeno da je epruveta uzeta iz zavarenog spoja, žljeba oblika "duplo X", kao što je naznačeno na sl. 3. S obzirom da su podaci o potrebnim karakteristikama materijala bili dostupni samo za osnovni metal (OM) i metal šava (MŠ), to su svojstva ZUT pretpostavljena, a epruveta je modelirana kao tri-materijalno telo. Dimenzije epruvete i podaci o karakteristikama OM, MŠ i ZUT su dati na sl. 3.



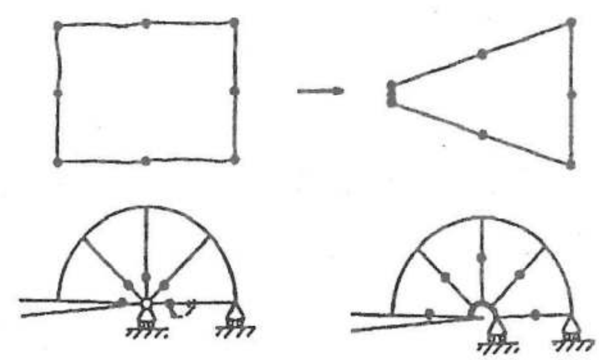
Slika 3. CT epruveta

Mreža konačnih elemenata je data na sl. 4, uz poseban prikaz dela mreže oko vrha prsline, koji je urađen u skladu sa preporukama ESIS /10/. Korišćeni su osmočvorni izoparametarski konačni elementi, sa redukovanom integracijom u Gausovim tačkama (2x2). Singularitet oko vrha prsline ($r^{-1/2}$) je simuliran "degenerisanim" konačnim elementima sa tri nezavisna čvora u vrhu prsline, sl. 5. Detaljniji opis ove tehnike je dat u radu /11/.

Rezultati za C* integral za OM u zavisnosti od vremena su dati u radu /12/, a ovde su prikazani na sl. 6, gde se vidi da je C* integral nezavisan od vremena i od putanje u stacionarnoj oblasti puzanja.

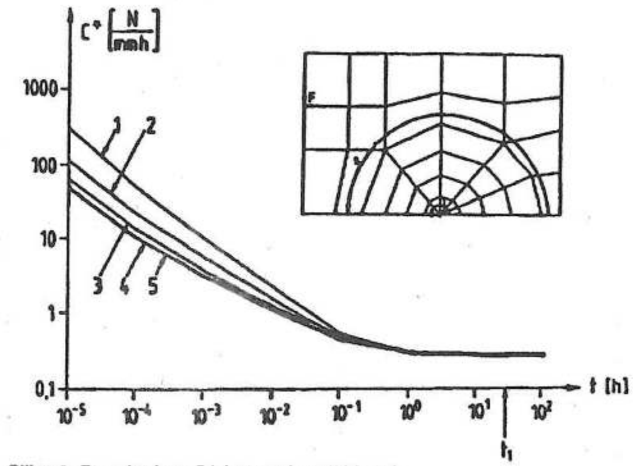


Slika 4. Mreža konačnih elemenata



Slika 5. Singularni elastični i elasto-plastični elementi

U ovom radu je za određivanje C* integrala korišćeno deset putanja integracije, sl. 4, od kojih su putanje 1-4 obuhvatale sva tri materijala, putanje 5-6 MŠ i ZUT, a putanje 7-10 samo MŠ. Za svih deset putanja je izračunavan i modifikovani C* integral, korišćenjem putanja oko granica različitih materijala. Rezultati proračuna, dati u tab. 1, očigledno potvrđuju teorijska razmatranja. Naime, kao što se iz tab. 1 vidi, sa udaljavanjem putanja integracije od vrha prsline raste i odstupanje C* integrala od vrednosti koje se dobijaju za putanje 7-10 (samo kroz MŠ), dok su vrednosti modifikovanog C* integrala iste, u granicama numeričke greške, za sve putanje.



Slika 6. Rezultati za C* integral za OM, /3/

Tabela 1. C integral (N/m/h) za CT epruvetu sa zavarenim spojem*

putanja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C* (izraz 9)	154	150	143	140	138	134	130	128	131	129
modifik. C*	128	125	129	126	134	133	130	128	131	129

ZAKLJUČAK

Na osnovu ovog rada mogu se izvesti sledeći zaključci:

- heterogenost materijala, odnosno različita viskoplastična svojstva MO, MŠ i ZUT zavarenih spojeva, bitno utiče na vrednost C* integrala za različite putanje, narušavajući njegovu nezavisnot od putanje.

- primenom modifikovanog C* integrala dobija se integralni izraz nezavisan od putanje, koji je važeći parametar mehanike loma za stacionarne probleme puzanja zavarenih spojeva.

- za nestacionarne probleme puzanja je formulisan C(t) integral, nezavisan u čitavom vremenskom domenu, koji se takođe može modifikovati u cilju primene na zavarene spojeve.

- izračunavanje svih navedenih integralnih izraza je moguće primenom metode konačnih elemenata na odgovarajući problem puzanja.

- opisana procedura ne obuhvata metalurške uticaje, koji su često presudni za ponašanje zavarenog spoja.

LITERATURA

1. J.R.Rice, Fracture, Vol. II, Academic Press, 1968, str. 191-308.
2. M.F.Kanninen, C.H.Popelar: Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, N.Y., 1985
3. V.Kumar, M.D.German, C.F.Shih, EPRI RP-1237, Schenectedy, 1981
4. M.Berković, A.Sedmak, J.Jarić, Monografija 5. Međunarodne Letnje Škole Mehanike Loma, GOŠA - TMF, 1991, str. 3-20.
5. B.Božić, S.Sedmak, B.Petrovski, A.Sedmak, Glas SANU, No 25, 1989
6. S.Sedmak, A.Sedmak, N.Vukomanović, Zbornik ECF8, Torino, EMAS, 1990, str. 1596-1599.
7. M.E.Gurtin, J.Elasticity, Vol.9, 1979, str. 186-195.
8. M.Pavišić, A.Sedmak, N.Savović, Primena mehanike loma na zavarene spojeve u uslovima stacionarnog puzanja, Zavarivač 3-4, 1991, str. 89-97
9. D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice, Pinridge Press, Swansea, 1980.
10. N. Savović, A.Sedmak, Preporuke za primenu metode konačnih elemenata u mehanici loma, Monografija 6. Međunarodne Letnje Škole Mehanike Loma, TMF-GOŠA-ECPD, 1994, str. 228-233
11. N.Savović, Magistarski rad, 1991, Mašinski fakultet, Beograd
12. Brunet, Boyer, Proc. of the III International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Pineridge Press, 1984.
13. B. Moran and C.F. Shih, International Journal of Fracture 35 (1987) 295-310.
14. M.Pavišić, Primena integrala nezavisnih od putanje na probleme mehanike loma u uslovima puzanja, doktorska teza, Mašinski fakultet, 1995.

DODATAK - Zakon održanja tipa J integrala za nestacionarno puzanje

U radu /13/ je uveden integral brzine disipacije energije, definisan na uobičajen način za prslinu koja napreduje duž x_1 ose konstantnom brzinom, sl. D1:

$$C = \lim_{\Gamma\to 0}\int_\Gamma \left[\overline{W}\delta_{1j} - \sigma_{ij}\dot{u}_{i,1}\right] n_j d\Gamma = \lim_{\Gamma\to 0}\int_\Gamma H_{1j} n_j d\Gamma \qquad (D1)$$

gde je H_{1j} energetski fluks, a simbol "," označava parcijalni izvod po koordinati x_j, Γ infinitezimalno mala kontura integracije, fiksna u odnosu na vrh prsline, sl. D1, a $\overline{W}$ definisano kao:

$$\overline{W} = \int_0^t \sigma_{ij}\dot{d}_{ij} dt \qquad (D2)$$

gde je $d_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2$ brzina deformacije, a $v_i = \dot{u}_i$ brzina čestice.

U radu /13/ je pokazano da je integralni izraz (D1) lokalno nezavisan od putanje ako su ispunjeni uslovi lokalnog stacionarnog ponašanja materijala. Izvođenje integralnog izraza (D1) se zasniva na primeni zakona održanja, Rejnoldsove transportne teoreme i teoreme o divergenciji, bez uvođenja ograničenja za ponašanje materijala. Na osnovu razmatranja u /13/ mogu se uslovi za globalnu nezavisnost od putanje integrala (D1) svesti na:

$$H_{1j,j} = \overline{W}_{,j} - \sigma_{ij}\dot{u}_{i,1j} = \overline{W}_{,1} - \sigma_{ij} d_{ij,1} = 0 \qquad (D3)$$

Da bi se dalje ispitao uslov globalne nezavisnosti od putanje integrala (D3) u radu /14/ je pretpostavljeno da važi

$$\overline{W} = \overline{W}(d_{ij}, \alpha_{ij}) \qquad (D4)$$

gde je α_{ij} unutrašnja promenljiva, definisana kao:

$$\alpha_{ij} = \int_0^t \sigma_{ij} dt, \qquad \dot{\alpha}_{ij} = \sigma_{ij} \qquad (D5)$$

Iz (D2) sledi:

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial d_{ij}} = \frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left(\int_0^t \sigma_{ij}\dot{d}_{ij} dt\right) = \frac{\partial}{\partial d_{ij}}\left(\int_0^{d_{ij}} \sigma_{ij} dd_{ij}\right) = \sigma_{ij} \qquad (D6)$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}}\left(\int_0^t \sigma_{ij}\dot{d}_{ij} dt\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}}\left(\int_0^{\alpha_{ij}} \dot{d}_{ij} d\alpha_{ij}\right) = \dot{d}_{ij} \qquad (D7)$$

pa važi:

$$\overline{W}_{,1} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial d_{ij}}\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \alpha_{ij}}\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} d_{ij,1} + \dot{d}_{ij}\alpha_{ij,1} \qquad (D8)$$

gde je pretpostavljana homogenost materijala, bar u x_1 pravcu. Uslov (D3) sada postaje:

$$\dot{d}_{ij}\alpha_{ij,1} = 0 \qquad (D9)$$

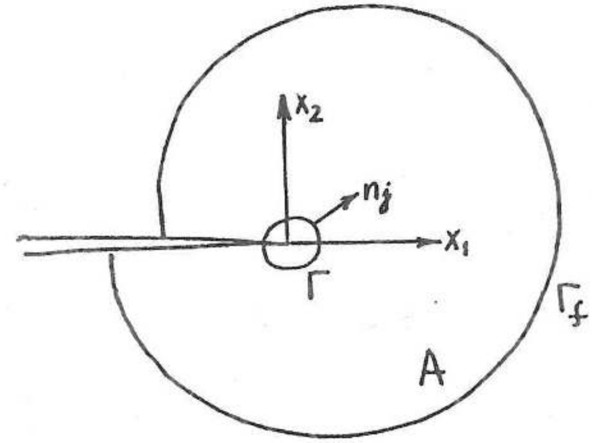
što je ispunjeno ili za $d_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = const$ (u vremenu), tj. za stacionarne probleme, ili za $\alpha_{ij,1} = 0$, što nema fizičko značenje.

U slučaju nestacionarnih problema, mora da se uzme u obzir dodatni integralni član, što sledi iz primene teoreme o divergenciji:

$$C = \lim_{\Gamma\to 0}\int_\Gamma \left(\overline{W}\delta_{1j} - \sigma_{ij}\dot{u}_{i,1}\right) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_f}\left(\overline{W}\delta_{1j} - \sigma_{ij}\dot{u}_{i,1}\right) n_j d\Gamma - \int_A \dot{d}_{ij}\alpha_{ij,1} dS \qquad (D10)$$

gde je A domen definisan konturom Γ_f, sl. D1.

Izraz (D10) predstavlja zakon održanja tipa J integrala za nestacionarnu vremeski zavisnu mehaniku loma, a sastoji se od linijskog integrala po putanji Γ_f i od površinskog integrala po domenu A, koji je definisan (ograničen) putanjom Γ_f. Za slučaj stacionarnog problema i materijal koji se ponaša po Nortonovom eksponencijalnom zakonu integralni izraz (D10) se svodi na C^* integral.



Slika D1.