

<https://doi.org/10.24867/JPE-1994-11-089>

ORIGINALNI NAUČNI RAD

Милисављевић, Б., Зељковић, М.:

## ПРИНУДНЕ ВИБРАЦИЈЕ АКСИЈАЛНЕ СТРУКТУРЕ

## FORCED VIBRATIONS OF AXIAL STRUCTURE

### Summary:

*This paper presents a general mathematical model of forced vibrations of an axial structure with damping due to internal friction in material. The axial structure is considered as a system of several degrees of freedom. The study is based on a model discretized by beam finite elements.*

*The introduced mathematical model considers free undamped and damped vibrations.*

*The occurrence of free vibrations is found to be accompanied by natural circular frequencies and damped circular frequencies respectively. A definite relationship which exists between the amplitudes of co-ordinates and the configurations is referred to as free vibrations.*

*When forced damped vibrations take place, then the steady-state vibrations occur in the system, because the damped vibrations decay exponentially in time. In the analytical solution of the steady-state vibration problem, the concept of complex amplitude is used. In such way the transfer function of the system is derived. By splitting the transfer function into real and imaginary parts, the real and imaginary receptances or the parameter equations of the Nyquist plot are obtained.*

*The stability of axial structure with varying logarithmic decrement is analysed for forced damped vibrations by the Nyquist stability criterion.*

*The confirmation of the general model has been made on an example of axial structure, i.e. machine tool main spindle.*

\*) Милисављевић, др Бранко, доцент; Зељковић, мр Милан, асистент, Факултет техничких наука, Институт за производно машинство, В. Перића Валтера 2, 21000 Нови Сад

**Резиме:**

Ураду је дефинисан општи математички модел принудних линеарних вибрација аксијалне структуре уз узимање у обзир пригушења услед постојања унутрашњег трења у материјалу. Аксијална структура се посматра као систем са коначним бројем степени слободе осциловања. Проучавање се врши на моделу дискретизованом коначним елементима у облику греде.

Разматрањем слободних вибрација дефинисаног математичког модела, без и са пригушењем, добијају се сопствене кружне фреквенције које служе за налажење главних облика вибрација. Дата је оцена утицаја пригушења на слободне вибрације. Како слободне вибрације због појаве пригушења брзо ишчезавју то је неопходно да се разматра стационарни режим принудних вибрација који се након тога устаљује. Аналитичко решавање проблема стационарног режима вибрација вршено је применом комплексних амплитуда. На овај начин је нађена преносна функција система. Растављањем преносне функције на реални и имагинарни део добијене су параметрске једначине амплитудно-фазне карактеристике аксијалне структуре тј. Најквистови дијаграми. Применом Најквистовог критеријума на ове дијаграме извршена је анализа стабилности аксијалне структуре, при чему је варирана вредност логаритамског декремента пригушења. Нацртани су Најквистови дијаграми за неке карактеристичне чворове аксијалне структуре, и констатовано је да је систем у свим чворовима условно стабилан.

**1.0 УВОДНЕ НАПОМЕНЕ**

Понашање машине алатке као система у експлоатацији зависи од показатеља квалитета њених елемената, па се пројектовању виталних елемената мора посветити посебна пажња. С друге стране, примена савремених материјала алата захтева све веће бројеве обртаја машана алатки. Број обртаја главних вртена се све више приближава првој сопственој фреквенцији вретена и постоји опасност од резонанције, односно, са порастом броја обртаја нагло расте амплитуда осциловања изазвана грешкама израде, дебалансом, поремећајима од погона и процеса резања. У вези са тим расту захтеви за динамичким прорачуном елемената машина алатки, а посебно главних вртена. Зависно од начина узимања у обзир улежиштења, начина причвршћења алата или прибора за стезање обрадка, елемената погона (зупчаника, ремених преносника, спојница итд.) развијени су различити динамички модели за прорачун склопа главног вретена. Добро је позната, да је за испитивање деформација под дејством сила различитог карактера неопходно спровести како статичке тако и динамичке прорачуне, па је пројектовање главних вртена засновано на статичкој и динамичкој анализи.

Проблематика идентификације статичког и динамичког понашања склопа главног вретена је предмет интересовања - истраживања и Лабораторије за машине алатке. Постигнути су одређени резултати, како у развоју експерименталних тако и у развоју математичких модела, нарочито везано за идентификацију статичког понашања склопа главног вретена, док се са становишта динамичког понашања склопа главног вретена посматра као систем са коначно много степени слободе осциловања. Кроз овај рад је постављен општи модел дефинисања динамичких карактеристика аксијалних структура различитог начина ослањања, под дејством принудне силе уз узимање у обзир и пригушења које се јавља услед унутрашњег трења у материјалу.

## 2.0 МОДЕЛ ПРИНУДНИХ ВИБРАЦИЈА АКСИЈАЛНЕ СТРУКТУРЕ

### 2.1 Основне поставке

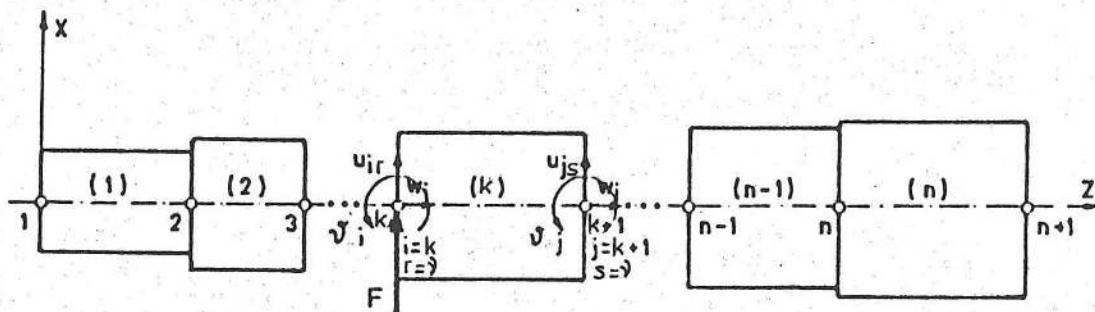
Проучавање динамичких карактеристика главних вретена при линеарним вибрацијама вршено је на различитим математичким моделима од стране више аутора. Већина ових модела заснива се на примени метода коначних елемената, облика греде. При томе чворови греде врше помераје у правцу  $x$ -осе, а греда се савија око  $y$ -осе. Помераји коначних елемената облика греде у правцу других оса најчешће су узимани у обзир код осталих вретена. Пригушење у материјалу углавном се занемарује. Разматра се само спољашње пригушење, тј. пригушење у ослонцима и допунским пригушницама. О овоме се подробније може наћи, на пример, у: [1],[3],[10],[16],[17],[18].

У овоме раду се приказује део истраживања везаних за динамичко понашање аксијалних структура у оквиру много ширег истраживачког програма [5]. Тако се овде узима се у обзир пригушење вибрација услед постојања унутрашњег трења у материјалу. Квантитативна мера пригушења вибрација у материјалу изражава се неком бездимензијском карактеристиком, као што је логаритамски декремент вибрација  $\delta$ . Унутрашње трење зависи од врсте и стања материјала и одређује се експериментално [14]. Експериментима је утврђено да величина пригушења не зависи од сопствене фреквенције вибрација еластичног тела [2].

### 2.2 Општи модел аксијалне структуре

Елементи носећих структура машина алатки код којих је димензија у једном правцу вишеструко већа од димензија у друга два називају се аксијалне структуре. Типични представници ових структура су главна вретена, вратила и осовине.

Главна вретена је греда променљивог попречног пресека, тј. аксијална структура постављена на ослонце. Реализација ослањања остварује се помоћу лежајева, који могу да буду еластични, крути или круто укљештени. Материјал аксијалне структуре је, по претпоставци, хомоген. При вибрацијама главног вретена узима се у обзир појава пригушивања, услед унутрашњег трења у материјалу.



Слика 1: Општи модел аксијалне структуре.  
Figure 1: General model of the axial structure.

Аксијална структура, приказана на слици 1, врши вибрације у  $(x, z)$  - равни. Дискретизована је на  $n$  коначних елемената у облику греде, тј. има  $n+1$  чворова. Чворови могу да врше помераје у правцу  $x$  - осе и у правцу  $z$  - осе, а коначни елемент (греда) може да се савија око  $y$  - осе. Овако дискретизована аксијална структура има

$$N = (3n + 3) - (n_1 + n_2 + 2n_3)$$

степені слободі [11]. Број компонентат укупног вектора помераја аксијалне структуре једнак је броју степені слободі  $N$  и гласи:

$$\{\delta\} = \{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_N\}^T = \{u_1 w_1 \vartheta_1 | u_2 w_2 \vartheta_2 | \dots | u_i \vartheta_i | \dots | w_j \vartheta_j | \dots | w_i | \dots | u_n w_n \vartheta_n\}^T \quad (1)$$

Вектор помераја (1) је вектор-колона.

Користећи резултате за овако уведени општи модел аксијалне структуре, приказан у [11], одређује се матрица крутости  $[K]$ , инерциона матрица  $[M]$  и матрица пригушења  $[B]$  посматраног главног вретена. Матрице  $[K], [M], [B]$  су квадратне, димензије  $N \times N$ :

$$[K] = [k_{ij}]_{N \times N}, [M] = [m_{ij}]_{N \times N}, [B] = [b_{ij}]_{N \times N}$$

На главно вретено делује хармонијска принудна сила  $F(t) = H \sin pt$ , где је  $H$  - амплитуда, а  $p$  - кружна фреквенција принудне силе. Ова сила симулира дејство процеса резања при раду машине алатке. Принудна сила  $\{F(t)\}$  делује у координати  $k$  аксијалне структуре:

$$\{F(t)\} = \{0 \ 0 \ \dots \ F_k \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\}^T; F_k = H \sin pt.$$

Диференцијалне једначине малих линеарних принудних вибрација аксијалне структуре дискретизоване коначним елементима, са унутрашњим трењем, у матричном облику гласе (в. на пример [7],[8],[13],[20],[21]):

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}. \quad (2)$$

Опште решење хомогеног дела једначине (2) описује слободне вибрације аксијалне структуре. Партикуларно решење нехомогеног дела једначине (2) описује вибрације аксијалне структуре услед деловања хармонијске принудне силе. Слободне вибрације, услед постојања пригушења у материјалу брзо ишчезавају и остаје само партикуларно решење једначине (2), које описује стационарни режим вибрација аксијалне структуре, генерисан хармонијском принудном силом  $F(t)$ .

Претпоставиће се да је пригушење пропорционално, тј. да важи следећа веза између матрице пригушења и инерционе матрице аксијалне структуре (в.напр.: [4],[13],[20],[21]):

$$[B] = \frac{\beta}{\rho} [M]. \quad (3)$$

где је  $\beta$  коефицијент пригушења у материјалу аксијалне структуре, док је  $\rho$  густина материјала. Услов (3) је потребан да би се једначине кретања (2) разматраног дисипативног система могле свести на главне координате дисипативног система [4],[13].

Једначина кретања (2) описује вибрације дисипативног система под дејством принудне силе. У раду се посматра утицај пригушења у материјалу на кружне фреквенције слободних вибрација и утицај пригушења на принудне вибрације. Ради тога ће се прво разматрати слободне вибрације, а затим стационарни режим принудних вибрација, који настаје након ишчезавања слободних вибрација.

### 2.3 Слободне вибрације аксијалне структуре

Утицај пригушења у материјалу анализоваће се посматрањем слободних вибрација аксијалне структуре у два случаја:

- пригушење у материјалу је занемариво,

- пригушење у материјалу није занемариво.

Аксијална структура дискретизована са  $n$  коначних елемената у облику греде, сл. 1, према условима описаним у одељку 2.2 има  $N = (3n+3) - (n_1 + n_2 + 2n_3)$  степени слободе. При слободним вибрацијама еластичног система десна страна једначине (2) је хомогена.

### 2.3.1 Слободне вибрације без пригушења у материјалу

Слободне вибрације аксијалне структуре, без пригушења у материјалу, са  $N$  степени слободе описује следећа диференцијална једначина:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0. \quad (4)$$

Једначина (4) добијена је из једначине (2) испуштањем члана на десној страни, који описује дејство принудне силе и другог члана на левој страни, који описује утицај пригушења у материјалу на вибрације.

Матрице  $[M]$  и  $[K]$  су реалне, симетричне и позитивно дефинитне. Положај  $\{\delta\} = 0$  је положај стабилне равнотеже еластичног система. Решење једначине (4) тражи се тада у следећем облику:

$$\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}, \quad (5)$$

где је  $\omega$  - кружна фреквенција слободних вибрација аксијалне структуре која се назива сопствена фреквенција система, а  $\{\delta_0\}$  - вектор-колона формиран од  $N$  непознатих констаната. Заменом (5) у једначину (4) добија се *фреквентна једначина*

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (6)$$

Једначина (6) представља *потребан и довољан услов егзистенције нетривијалних решења* (5) једначине (4).

Решавањем једначине (6) добија се спектар сопствених кружних фреквенција слободних вибрација аксијалне структуре, тј.:

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}\}.$$

### 2.3.2 Слободне вибрације са пригушењем у материјалу

Линеарне слободне вибрације аксијалне структуре (сл. 1), описује хомогени део једначине (2), тј.:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [V]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0. \quad (7)$$

Применом везе (3) на одговарајуће матрице у једначини (7) долази се до следеће диференцијалне једначине:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + \frac{\beta}{\rho} [M]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0. \quad (8)$$

Сопствене кружне фреквенције слободних вибрација са пригушењем у материјалу одређују се на следећи начин:

Прво се трансформише једначина (8) применом релације

$$\{\delta\} = \{\gamma\} e^{-\left(\frac{\beta}{2\rho}\right)t}, \quad (9)$$

где је  $\{\gamma\}$  вектор нових координата кореспондентан вектору полазних координата  $\{\delta\}$ . Сменом (9) у (8) добија се диференцијална једначина

$$[M]\{\ddot{\gamma}\} + ([K] - \frac{\beta^2}{4\rho^2} [M])\{\gamma\} = 0. \quad (10)$$

Затим се, пошто је матрица  $([K] - (\frac{\beta^2}{4\rho^2}) [M])$  реална, симетрична и позитивно дефинитна, тражи решење једначине (10) у облику:

$$\{\gamma\} = \{\gamma_0\}e^{i\Omega t}, \quad (11)$$

где је  $\Omega$  кружна фреквенција слободних вибрација са пригушењем, а вектор  $\{\gamma_0\}$  је непознати константни вектор-колона.

Коначно, применом смене (11) на диференцијалну једначину (10) добија се *фреквентна једначина* слободних пригушених вибрација:

$$\det([K] - \frac{\beta^2}{4\rho^2} [M] - \Omega [M]) = 0. \quad (12)$$

Утицај пригушења на вибрације у многим материјалима не зависи од њихове фреквенције, како је експериментално установљено [14], што и оправдава увођење релације (3). Дисипативне карактеристике материјала изражавају се преко неке од бездимензијских карактеристика пригушења. У овом раду се то чини помоћу логаритамског декрементa вибрација  $\delta$ . Вредност логаритамског декрементa дата је дијаграмски у [14]. Овде је потребно нагласити да се мора разликовати ознака за логаритамски декремент пригушења вибрација  $\delta$  у материјалу од ознаке за вектор помераја аксијалне структуре  $\{\delta\}$ .

Нека је  $\omega_0$  најнижа вредност сопствене кружне фреквенције слободних вибрација аксијалне структуре без постојања пригушења у материјалу. Тада важи следећа веза [14]:

$$\frac{\beta}{2\rho} = \frac{\omega_0 \delta}{2\pi}. \quad (13)$$

Сменом (13) у (12) долази се до фреквентне једначине слободних пригушених вибрација аксијалне структуре:

$$\det([K] - \frac{\omega_0^2 \delta^2}{4\pi^2} [M] - \Omega^2 [M]) = 0. \quad (14)$$

Решење фреквентне једначине (14) да је спектар сопствених кружних фреквенција пригушених вибрација аксијалне структуре:

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{3n+3-(n_1+n_2+2n_3)}\}.$$

Величине  $\Omega_i$  зависе од вредности логаритамског декрементa вибрација  $\delta$ .

### 2.3.3 Оцена утицаја пригушења на кружну фреквенцију

Пригушење у еластичном систему доводи до смањења вредности кружне фреквенције слободних вибрација. Утицај пригушења одређује се према количнику норми матрица  $[[M]^{-1} [B]]^2$  и  $[[M]^{-1} [K]]$ .

Услов да је утицај пригушења мали гласи [4]:

$$Q = \frac{\|[[M]^{-1} B]\|^2}{\|[[M]^{-1} K]\|} \ll 1 \quad (15)$$

У количнику (15) могу да се узму било које норме матрица. Овде ће се користити Фробенијусова норма, која је за квадратну матрицу  $[A] = [a_{ij}]_{N \times N}$

$$\| [A] \| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2} \quad (16)$$

Када је дисипација у еластичном систему мала, тада се сопствене кружне фреквенцији слободних пригушених вибрација мало разликују од сопствених кружних фреквенција вибрација без пригушења. Тако се код прве апроксимације могу занемарити недијагонални елементи матрице  $[[M]^{-1} [B]]$ . Овај приступ је оправдан у случајевима када не постоје поуздане информације о пригушењу.

## 2.4 Принудне вибрације аксијалне структуре

Принудне вибрације аксијалне структуре под дејством принудне силе уз постојање унутрашњег трења у материјалу описује диференцијална једначина кретања (2). У овом одељку ће се посматрати стационарни режим принудних вибрација аксијалне структуре. Анализа стационарног режима вибрација дискретизоване аксијалне структуре интересантна је зато што слободне вибрације, због појаве пригушења у материјалу, брзо ишчезавају после чега долази до устаљивања режима принудних вибрација.

Аналитичко решавање проблема стационарног режима вибрација аксијалне структуре вршиће се применом метода комплексних амплитуда, зато што је овај метод ефикаснији од непосредног аналитичког решавања једначине (2) када се посматра стационарни режим вибрација еластичног система [4],[8],[13]. Ради тога ће се прво прећи са полазних координата  $\{\delta\}$  на главне координате  $\{q\}$  дисипативног система. Затим се уводе комплексне амплитуде.

### 2.4.1 Свођење проблема на главне координате

Решење проблема стационарних принудних вибрација у дисипативним системима са коначним бројем степени слободе може се добити увођењем главних координата дисипативних система. Систем диференцијалних једначина (2) се своди са полазних координата  $\{\delta\}$  на главне координате  $\{q\}$ , када важи веза (3), применом модалне матрице  $[\mu]$  (в. :[4],[7],[20],[21]). Формирање модалне матрице дато је, на пример, у: [4], [7], [15]. Главне координате дисипативних система се уводе на следећи начин:

$$\{\delta\} = [\mu]\{q\}. \quad (17)$$

где је  $\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N\}^T$ , а модална матрица је  $[\mu] = [\mu_{ij}]_{N \times N}$

Применом (17) и (3) једначина (2) постаје:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P(t)\}. \quad (18)$$

где су:  $[M] = \text{diag} \{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_N\}$ ,  $[B] = \text{diag} \{b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N\}$  и  $[K] = \text{diag} \{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_N\}$  дијагоналне матрице сагласне полазним матрицама  $[M]$ ,  $[B]$  и  $[K]$ ; док је  $\{P(t)\} = \{h\} \sin pt$  - неаутономни члан који одговара принудној сили  $\{F(t)\} = \{f\} \sin pt$   $\{f\} = \{0 \ 0 \ \dots \ N \ \dots \ 0\}^T$ , амплитуда  $N$  принудне силе налази се у овом вектору на  $k$ -том месту,  $\{f\} = [\mu]^T \{h\}$ , док је

$$\{h\} = \{\mu_{k1}N \ \mu_{k2}N \ \dots \ \mu_{kN}N\}^T.$$

Матрична једначина (18) представља систем диференцијалних једначина, који описује принудне вибрације аксијалне структуре помоћу главних координата.

## 2.4.2 Амплитудно-фазне карактеристике аксијалне структуре

Метод комплексних амплитуда је најпогоднији при аналитичком решавању проблема устаљивања принудних вибрација система са коначним бројем степени слободе. Једначина (18) даје могућност да се уведу комплексне амплитуде. Ради тога се уводи комплексни вектор  $\{z\} = \{g + i q\}$ , који представља комплексну генерализовану координату. Сада се једначина принудних вибрација (18) може написати у комплексном облику:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [B]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{h\}e^{ipt}, \quad (19)$$

где је:  $\{z\} = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}^T$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Партикуларно решење једначине (19) је облика  $\{z\} = \{C\}e^{ipt}$ , где је  $\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}^T$  комплексна амплитуда стационарног режима принудних вибрација аксијалне структуре. Матричној једначини (19) одговара систем симултаних диференцијалних једначина:

$$m_r \ddot{z}_r + b_r \dot{z}_r + k_r z_r = h_r e^{ipt}, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Партикуларни интеграл једначине (20) тражи се у облику:

$$z_r = C_r e^{ipt}$$

Сменом овог израза у једначини (20) добија се комплексна амплитуда стационарног режима принудних вибрације у правцу координате  $r$ :

$$C_r = \frac{h_r}{(k_r - p^2 m_r) + ipb_r}; \quad h_r = \mu_{kr} H, \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

Комплексна крутост је  $(k_r - p^2 m_r) + ipb_r$ . На основу овога може се написати тражени партикуларни интеграл једначине (20):

$$z_r = \frac{\mu_{kr} H}{(k_r - p^2 m_r) + ipb_r} e^{ipt}; \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

Израз (21) представља закон кретања по комплексној главној координати  $r$  дисипативног система. Другим речима, израз (21) је одговор координате  $r$  на хармонијску побуду унету у систем у координати  $k$ . На основу овога, може се увести преносна функција (в. :[8],[19]). Овде није интересантна преносна функција за главне координате, него за полазне координате. Због тога се врши одговарајућа трансформација координата, тј. прелазак са комплексних главних координата  $\{z\} = \{g + i q\}$  на комплексне полазне координате  $\{\xi\} = \{\alpha + i \delta\}$ .

Применом трансформације (17) на комплексне координате долази се до комплексних полазних координата:

$$\{\xi\} = [\mu]\{z\}; \quad \{\xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}.$$

Коришћењем израза (21) долази се до везе између главних и полазних координата у комплексном облику:

$$\xi_j = \sum_{r=1}^N \mu_{jr} z_r = e^{ipt} \sum_{r=1}^N \mu_{jr} \mu_{kr} \frac{H}{(k_r - p^2 m_r) + ipb_r}; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Овај израз је закон кретања координате  $j$  услед дејства принудне силе  $F = H \sin pt$  на аксијалну структуру. Како је преносна функција одговор, или реак-



ција у полазној координати  $j$  на хармонијску побуду, или поремећај, унет у систем у полазној координати  $k$ , преносна функција разматране аксијалне структуре је:

$$W_{jk}(p) = \sum_{r=1}^N \mu_{jr} \mu_{kr} \frac{1}{(k_r - p^2 m_r) + i p b_r}; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

Овде се посматра побуда само у координати  $k$ . Зато се, ради једноставнијег писања, уводи ознака  $W_j$  уместо  $W_{jk}$ . Растављањем комплексне функције (22) на реални и имагинарни део биће:

$$W_j(p) = U_j(p) + i V_j(p),$$

или:

$$U_j(p) = \sum_{r=1}^N \mu_{jr} \mu_{kr} \frac{k_r - p^2 m_r}{(k_r - p^2 m_r)^2 + (p b_r)^2}, \quad V_j(p) = - \sum_{r=1}^N \mu_{jr} \mu_{kr} \frac{p b_r}{(k_r - p^2 m_r)^2 + (p b_r)^2}$$

Функције  $U_j(p)$  и  $V_j(p)$  су параметарске једначине амплитудно-фазне карактеристике, тј. Најквистовог дијаграма или ходографа. Параметар је кружна фреквенција  $p$  принудне силе. Величине  $m_r$ ,  $b_r$ ,  $k_r$  су елементи раније срачунатих дијагоналних матрица  $[M]$ ,  $[B]$ ,  $[K]$ . Различитим вредностима логаритамског декремента вибрација  $\delta$ , односно величинама  $b_r$ , одговарају различите фамилију кривих у равни  $(U, V)$ . Ради прегледнијег приказивања и анализе амплитудно-фазних карактеристика врши се нормирање функција  $U_j(p)$  и  $V_j(p)$  дељењем са максималном вредношћу  $U_j(0)$ , која се добија за  $j = k$ , тј.

$$U_k(0) = \sum_{r=1}^N \mu_{kr}^2 \frac{1}{k_r}$$

На овај начин, цртају се амплитудно-фазне карактеристике сведене на бездимензијски облик, чије су параметарске једначине:

$$u_j(p) = U_j(p)/U_k(0), \quad v_j(p) = V_j(p)/U_k(0).$$

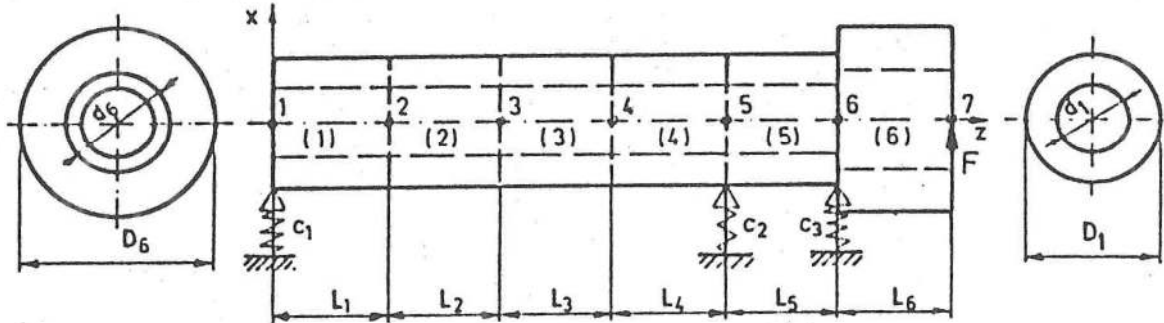
Применом Најквистовог критеријума на Најквистове дијаграме врши се анализа стабилности аксијалне структуре, као еластичног дисипативног система који врши вибрације под дејством периодичне принудне силе. У разматраном проблему посматра се стабилност режима стационарних принудних вибрација дискретизоване аксијалне структуре, за различите вредности логаритамског декремента вибрација, према Најквистовим дијаграмима. Проблем стабилности дисипативних система са различитих апликативних аспеката је разматран, на пример, у [9], [12], [17].

### 3.0 ПРИМЕР

Примена општег модела принудних вибрација аксијалне структуре са унутрашњим трењем, за анализу утицаја пригушења у материјалу на сопствене кружне фреквенције слободних вибрација и стационарни режим принудних вибрација, илустроваће се на примеру главног вретена струга дефинисаног на слици 2. Материјал вретена је конструкциони челик, модула еластичности  $E = 2 \times 10^{11}$  [Pa], и густине  $\rho = 7850$  [kg/m<sup>3</sup>]. Посматраће се различита стања материјала, којима одговарају различите вредности логаритамског декремента, и узете су три вредности логаритамског декремента пригушења вибрација [14]:

$$\delta = 2.3 [\%] = 0.023; \quad \delta = 13 [\%] = 0.13; \quad \delta = 21.5 [\%] = 0.215.$$

Главно вретено, приказано на слици 2, дискретизовано је са  $n = 6$  коначних елемената облика греде. Ови коначни елементи су означени са: (1), (2),..., (6); а чворови са: 1, 2, ..., 7. На главно вретено у чвору 7 дејствује периодична принудна сила  $F(t) = H \sin pt$ ;  $H = 100$  [N]. Сила  $F(t)$  симулира дејство силе резања на главно вретено и дејствује у радијалном правцу.



Слика 2. Главно вретено дискретизовано коначним елементима  
Figure 2. The main spindle discretized by the finite elements

Димензије коначних елемената су (в.:сл.2):

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 = \dots = L_6 &= 0.100 \text{ [m];} \\ D_1 = D_2 = \dots = D_5 &= 0.130 \text{ [m]; } D_6 = 0.210 \text{ [m],} \\ d_1 = d_2 = \dots = d_5 &= 0.080 \text{ [m]; } d_6 = 0.090 \text{ [m].} \end{aligned}$$

Разматрано главно вретено је еластично улежиштено у чворовима 1, 5, 6. Крутости ових лежајева су:

$$c_1 = 6,7 \cdot 10^9 \text{ [N/m]; } c_2 = c_3 = 2,8 \cdot 10^9 \text{ [N/m].}$$

Овакви лежајеви спречавају кретање у аксијалном правцу, тј. у правцу  $z$ -осе, тако да је број степени слободе:

$$N = 3n + 3 - (n_1 + n_2 + 2n_3) = 3 \times 6 + 3 - (3 + 0 + 2 \times 0) = 18.$$

Према томе, укупни вектор помераја има 18 координата и гласи:

$$\{\delta\} = \{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{18}\}^T = \{u_1 v_1 | u_2 w_2 v_2 | u_3 w_3 v_3 | u_4 w_4 v_4 | u_5 v_5 | u_6 v_6 | u_7 w_7 v_7\}^T \quad (23)$$

### 3.1 Слободне вибрације главног вретена

Слободне вибрације главног вретена посматраће се прво без пригушења, а затим са пригушењем у материјалу. Тако ће се испитати утицај унутрашњег трења на величину сопствених кружних фреквенција разматраног еластичног система.

Применом резултата изнетих у [11] лако се формирају матрица крутости

$$[K] = \frac{\pi}{64} EL_1 [k_{ij}^*]_{18 \times 18} \quad (24)$$

инерциона матрица,

$$[M] = \frac{1}{420} \frac{\pi}{4} \rho L_1^3 [m_{ij}^*]_{18 \times 18} \quad (25)$$

и матрица пригушења, помоћу везе (3) и (13),

$$[B] = \frac{\omega_0}{2\pi} \delta [M] \quad (26)$$

где је  $\omega_0$  минимална вредност сопствене кружне фреквенције слободних вибрација главног вретена.

### 3.1.1 Слободне вибрације без пригушења

Фреквентна једначина (6) за матрице (24) и (25) даје спектар сопствених кружних фреквенција разматраног главног вретена са слике 2, које су табеларно приказане у Табели 1.

Фреквенција рачуната према изразу  $f_i = \omega_i / 2\pi$  [Hz] дата је у трећој колони.

Најнижа вредност сопствене кружне фреквенције је  $\omega_0 = \omega_1$ .

Вредности сопствених кружних фреквенција  $\omega_8$  и  $\omega_9$  веома су блиске. Може се сматрати да су практично једнаке:  $\omega_8 = \omega_9 = \omega$ , тј. да су два корена фреквентне једначине једнака. Пошто се овде не посматрају форме вибрација, важно је потсетити на *две теоријске чињенице*.

Слободне вибрације одговарајућих координата одвијају се према различитим хармонијским законима са истом сопственом кружном фреквенцијом.

Према општој теорији линеарних диференцијалних једначина, у случају вишеструких корена карактеристичне једначине система са коначним бројем степени слободе, у решењима система могу да се појаве, *али не увек, секуларни чланови* типа  $t \sin \omega t$  и  $t \cos \omega t$ . У случају вишеструких корена фреквентне једначине слободних вибрација конзервативног система, у законима кретања одговарајућих координата секуларни чланови не могу да се појаве, јер њима одговарају растуће амплитуде вибрација. Ово противречи закону о конзервацији механичке енергије.

Табела Т.1

$i$	$\omega_i$ [s <sup>-1</sup> ]	$f_i$ [Hz]
1	7251.2723	1154.07
2	10748.8903	1710.74
3	21134.5452	3363.67
4	35677.8608	5678.31
5	41672.7738	6632.43
6	53507.4538	8515.97
7	77460.4232	12328.21
8	89585.0306	14257.90
9	89585.0305	14257.90
10	107871.1953	17168.23
11	145579.2438	23169.65
12	149915.5287	23859.79
13	172111.9861	27392.47
14	205621.8241	32725.73
15	258335.2161	41115.33
16	318019.6107	50614.39
17	365233.3495	58128.69
18	386247.9597	61473.27

Табела Т.3

$i$	$\Delta f_1 = f_i - f_{i1}$	$\Delta f_2 = f_i - f_{i2}$	$\Delta f_3 = f_i - f_{i3}$
	$\delta = 0.023$	$\delta = 0.130$	$\delta = 0.215$
1	0.031	0.988	2.706
2	0.021	0.666	1.824
3	0.010	0.339	0.927
4	0.006	0.201	0.549
5	0.005	0.172	0.470
6	0.004	0.134	0.366
7	0.003	0.092	0.253
8	0.002	0.080	0.218
9	0.002	0.080	0.218
10	0.003	0.066	0.181
11	0.001	0.049	0.134
12	0.001	0.048	0.131
13	0.001	0.041	0.114
14	0.001	0.035	0.095
15	0.0008	0.028	0.076
16	0.0007	0.022	0.061
17	0.0006	0.019	0.053
18	0.0006	0.018	0.051

### 3.1.2 Слободне вибрације са пригушењем

Када се узме у обзир пригушење у материјалу тада је фреквентна једначина слободних вибрација дата изразом (14). При томе је матрица пригушења (26), односно фреквентна једначина формирана узимањем минималне сопствене вредности кружне фреквенције  $\omega_0 = \omega_1$ . Корени ове једначине дају сопствене

кружне фреквенције  $\Omega_i$  дисипативног еластичног система. Њихове вредности су дате у Табели 2, у зависности од вредности логаритамског декремента вибрација  $\delta$ , као и одговарајуће фреквенције. Јединица  $\Omega_i$  је дата у  $[s^{-1}]$ .

Сопствене кружне фреквенције при постојању пригушења у материјалу су незнатно ниже од сопствених кружних фреквенција аксијалне структуре без пригушења. Ово се види из Табеле 3 у којој су дате разлике између фреквенција без пригушења  $f_i$  и сопствених фреквенција са прогушењем  $f_{i1}$ ,  $f_{i2}$ ,  $f_{i3}$  за различите вредности логаритамског декремента вибрација.

Сопствене кружне фреквенције за 8 и 9 координату скоро су идентичне ( $\Omega_8 = \Omega_9 = \Omega$ ). Ово може да доведе до појаве секуларних чланова, међутим оно се не појављују, јер су амплитуде слободних вибрација са пригушењем опадајуће.

При самопобудним вибрацијама амплитуде расту. Међутим, појава самопобудних вибрација обде није могућа, јер су сви елементи дијагонале матрице  $[B]$  позитивани. Самопобудне вибрације биле би могуће ако би бар један од ових елемената био негативан.

Табела Т.2

$i$	$\delta = 0.023$		$\delta = 0.130$		$\delta = 0.215$	
	$\Omega_i [s^{-1}]$	$f_i [Hz]$	$\Omega_i [s^{-1}]$	$f_i [Hz]$	$\Omega_i [s^{-1}]$	$f_i [Hz]$
1	7251.0779	1154.04	7245.0613	1153.08	7234.2714	1151.37
2	10748.7592	1710.72	10744.7013	1710.07	10737.4287	1708.91
3	21134.4785	3363.65	21132.4150	3363.32	21128.7182	3362.74
4	35677.8213	5678.30	35676.5990	5678.11	35674.4094	5677.76
5	41672.7400	6632.42	4167.1693	6632.25	41669.8189	6631.96
6	53507.4275	8515.96	53506.6125	8515.84	53505.1525	8515.61
7	53507.4275	12328.20	77459.8420	12328.11	77458.8335	12327.95
8	89585.0149	14257.89	89584.5281	14257.82	89583.6561	14257.68
9	89585.0148	14257.89	89584.5281	14257.82	89583.6561	14257.68
10	107871.1822	17168.23	107870.7779	17168.16	107870.0538	17168.05
11	145579.2441	23169.65	145578.9364	23169.61	145578.3980	23169.52
12	149915.5194	23859.79	149915.2284	23859.75	149914.7073	23859.66
13	172111.9779	27392.47	172111.7246	27392.43	172111.2707	27392.36
14	205621.8172	32725.73	205621.6051	32725.69	205621.2252	32725.63
15	258335.2106	41115.32	258335.0418	41115.29	258334.7395	41115.25
16	318019.6062	50614.39	318019.4691	50614.37	318019.2235	50614.33
17	365233.3556	58128.69	365233.2262	58128.67	365233.0123	58128.64
18	386247.9561	61473.27	386247.8431	61473.25	386247.6409	61473.22

### 3.1.3 Утицај пригушења на кружне фреквенције

Поређењем добијених вредности за сопствене кружне фреквенције слободних вибрација са пригушењем и без пригушења уочава се да пригушење у материјалу снижава њихове вредности. Оцена утицаја пригушења врши се помоћу критеријума исказаног количником (15). Применом Фробенијусове норме на матрице (24), (25) и (26) количник (15) даје за, три различите вредности логаритамског декремента  $\delta$ , следеће вредности:

$$\text{за } \delta = 0,023 : Q = 2,748 \cdot 10^{-8} \ll 1 ;$$

$$\text{за } \delta = 0,130 : Q = 1711,055 \cdot 10^{-8} \ll 1 ;$$

$$\text{за } \delta = 0,215 : Q = 240,180 \cdot 10^{-8} \ll 1 .$$

Добијени резултати показују да се овде ради о малом пригушењу [4].

### 3.2 Принудне вибрације главног вретена

Овде ће се посматрати специјални режим принудних вибрација (б. одељак 2.4)

Принудна сила  $F = H \sin pt$  делује на слободном крају главног вретена у радијалном правцу (в. сл.2) у чвору 7. Према томе, ова сила је у овај систем са 18 степени слободе уведена у координати  $k = 16$ , тј.:

$$\{F(t)\} = \{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ F_{16} \ 0 \ 0\}, \quad F_{16} = H \sin pt.$$

Кружна фреквенција  $p$  принудне силе се узима у опсегу од 0 до 40000. Овим су обухваћена прва четири резонантна подручја главног вретена, као што се може видети у Табели 1. Виша резонантна подручја су далеко изван области у којима су кружне фреквенције принудне силе у реалним техничким условима. Зато се не разматрају.

#### 3.2.1 Преносна функција

Применом модалне матрице  $[\mu]$  на матрице (24), (25), (26) добијају се следеће дијагоналне матрице:

$$[K] = \text{diag} \{k_1, k_2, \dots, k_{18}\}, \quad (27)$$

$$[M] = \text{diag} \{m_1, m_2, \dots, m_{18}\}, \quad (28)$$

$$[B] = \text{diag} \{b_1, b_2, \dots, b_{18}\}. \quad (29)$$

Ове матрице улазе у једначину (18) односно после преласка на комплексне амплитуде, у једначину (19).

Помоћу елемената матрица (27), (28), (29) формирају се преносне функције (22) за  $N = 18$  и побуду унету у систем у координати  $k=16$  :

$$W_{j16}(p) = \sum_{r=1}^N \mu_{jr} \mu_{16r} \frac{1}{(k_r - p^2 m_r) + ip b_r}; \quad j = 1, 2, \dots, 18. \quad (30)$$

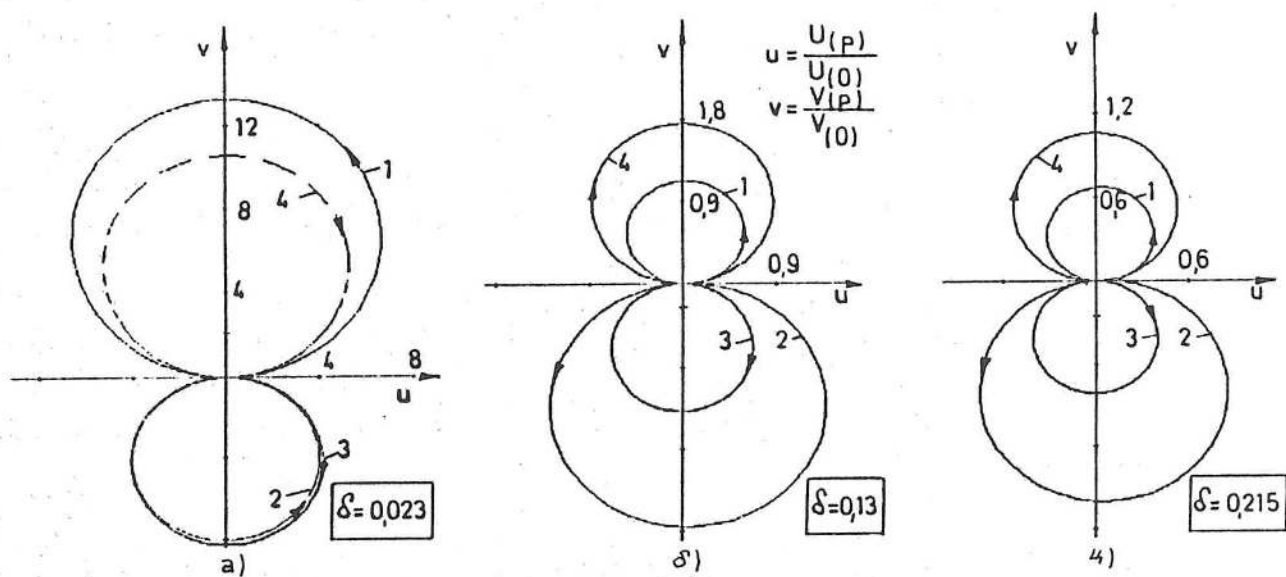
Растављањем преносне функције (30) на реални и имагинарни део и нормирањем са  $U_{16}(0)$ , као што је описано у одељку 2.5.2, добијају се параметарске једначине амплитудно-фазне карактеристике главног вретена, тј. Најквистови дијаграми.

#### 3.2.2 Најквистови дијаграми

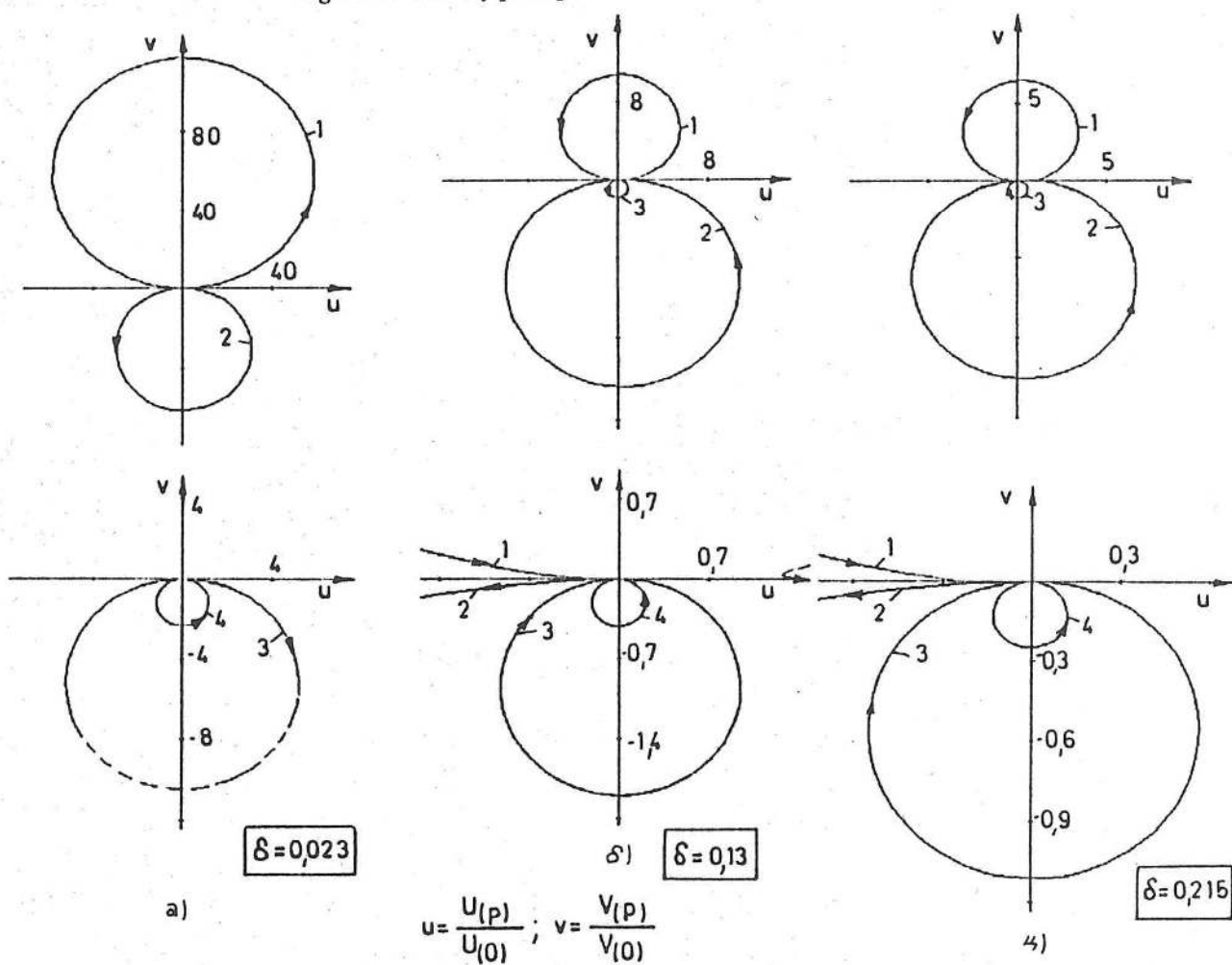
Стабилност главног вретена одређује се помоћу Најквистових дијаграма, тј. амплитудно-фазних карактеристика.

У овом примеру посматраће се одзиви на принудну силу која делује на слободном крају главног вретена у радијалном правцу. Сила  $F(t) = H \sin pt$  делује у чвору 7 по координати  $\delta_{16} = u_7$ . Посматраће се одзив у чвору 1 по координати  $\delta_1 = u_1$ , у чвору 3 по координати  $\delta_6 = u_3$  и на месту доношења принудне силе, тј. по координати  $\delta_{16} = u_7$ . Посматраће се, дакле, радијални одзиви система у неким координатама, на принудну радијално силу.

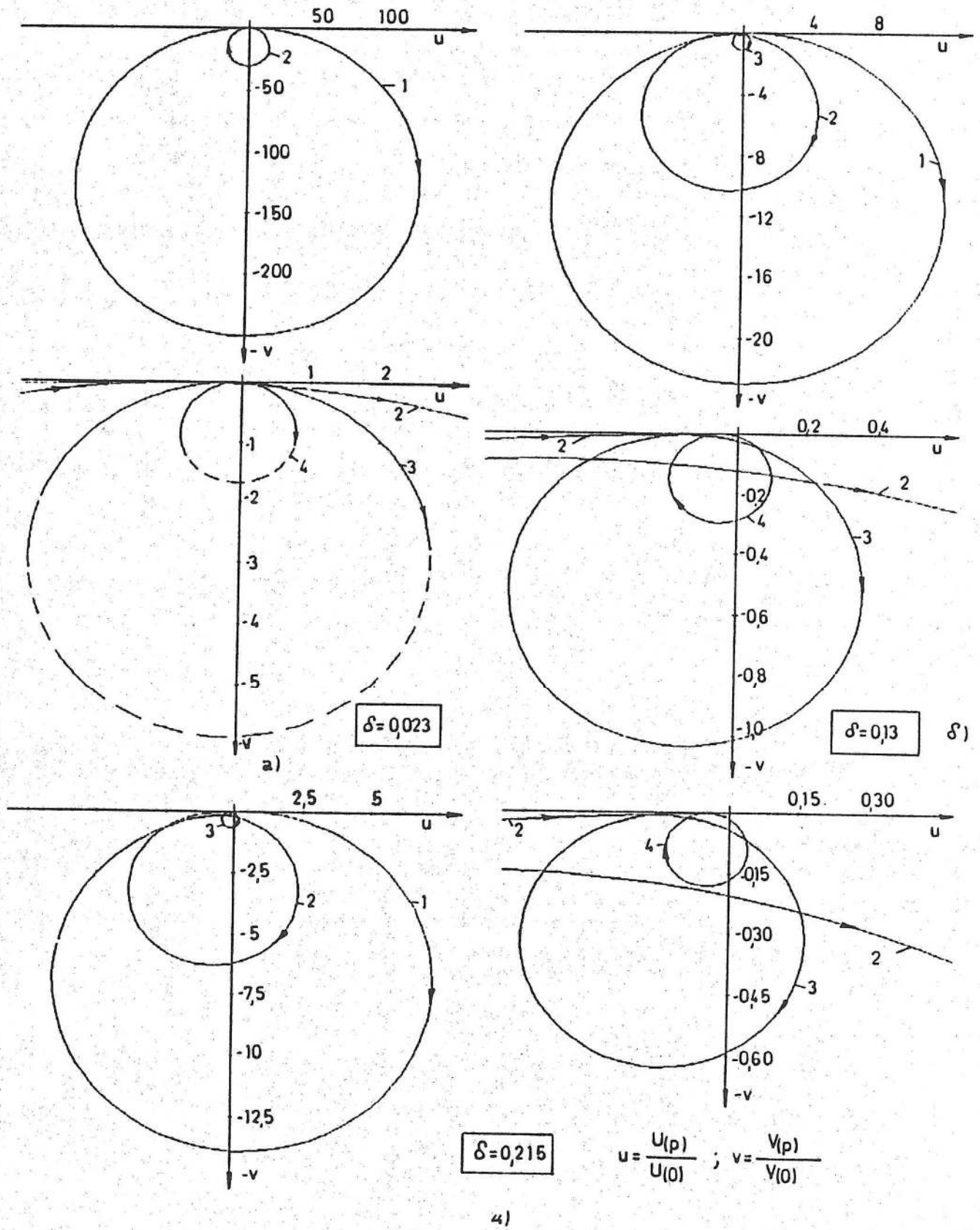
Стављањем у израз (30) да је  $j = 1, j = 6, j = 16$  долази се до одговарајућих преносних функција, а затим и до једначина амплитудно-фазних карактеристика у параметарском облику. На основу ових једначина добијени су дијаграми одзива у координатама  $\delta_1$ ,  $\delta_6$ ,  $\delta_{16}$  за три узете вредности логаритамског декрементa вибрација, који су дати на сликама 3, 4, 5.



Слика 3. Најквистови дијаграми у координати 1  
 а)  $\delta = 0,023$  ; б)  $\delta = 0,130$  ; в)  $\delta = 0,215$ .  
 Figure 3. The Nyquist plots at the coordinate 1



Слика 4. Најквистови дијаграми у координати 6  
 а)  $\delta = 0,023$  ; б)  $\delta = 0,130$  ; в)  $\delta = 0,215$ .  
 Figure 4. The Nyquist plots at the coordinate 6



Слика 5. Најквистови дијаграми у координати 16  
 а)  $\delta = 0,023$  ; б)  $\delta = 0,130$  ; у)  $\delta = 0,215$ .  
 Figure 5. The Nyquist plots at the coordinate 16

Најквистови дијаграми (в. сл. :3.а, б, ц; 4.а, б, ц; 5.а, б, ц) показују да амплитуде принудних вибрација при повећању вредности логаритамског декремента вибрација опадају. Одсечци које дају амплитудно-фазне карактеристике на негативном делу реалне осе повећањем логаритамског декремента вибрација се смањују, што сведочи о *повећању стабилности* стационарног режима вибрација. Максималне ординате амплитудно-фазних карактеристика представљају реципрочну меру пригушења у систему. Ни једна карактеристика на овим сликама не обилази тачку  $(-1, 0)$ , тако да је посматрано главно вретено као динамички систем *условно стабилна*.

#### 4.0 ЗАКЉУЧЦИ

Постављени општи математички модел принудних вибрација аксијалне структуре је примењен на главно вретено. На основу приказаних резултата може се закључити да је утицај унутрашњег трења у материјалу без обзира на његову величину, исказан логаритамским декрементом вибрација, врло мали. Уведена је претпоставка да је пригушење пропорционално инерционој матрици, што омогућава прелазак на главне координате.

За анализу проблема принудних вибрација са коначним бројем степени слободе коришћен је *метод комплексних амплитуда* који омогућава ефикасно налажење *преносне функције система*. Растављањем преносне функције на реални и имагинарни део добијају се параметарске једначине амплитудно-фазне карактеристике главног вретена тј. *Најквистови дијаграми*.

Добијени Најквистови дијаграми показују да порастом логаритамског декремента пригушења амплитуде принудних вибрација опадају и да је посматрано главно вретено као динамички систем *условно стабилно*. Облик Најквистовог дијаграма у свакој тачки система је различит, а највеће амплитуде се јављају на месту увођења побудне силе. При томе се види да је амплитуда прве сопствене фреквенције највећа док су остале вишеструко мање. Амплитуде истог реда величина се јављају у чворовима на месту постављања ослонаца главног вретена.

Усвојени детерминистички концепт анализе динамичког понашања аксијалне структуре под дејством сиснусне побудне силе омогућава ефикасно поређење са експерименталним резултатима (преко Најквистових дијаграма).

#### 5.0 ЛИТЕРАТУРА

- [1] AL-SHAREEF, K.J.H., BRANDON, J.A.: On the Effects of Variations in the Design Parameters on the Dynamic Performance of Machine Tool Spindle-Bearings Systems, *Int.J.Mach.Tools Manufact.*, Vol.30, No.3, 431-445, 1990.
- [2] АСТАШЕВ, К.В.: Диссипативные характеристики механических систем. Основные понятия и определения: ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ, том 6, 128-134, Машиностроение, Москва, 1981.
- [3] BAGCI, S: Computer-Aided Fatigue Design of Power Transmission Shafts Using Three-Dimensional Finite Shaft Element and Updated Mean Stress Diagram, *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, 1988.
- [4] БОЛОТИН, В.В., ЖИНЖЕР, Н.И.: Неконсервативные автономные системы с постоянными параметрами. Устойчивость линейных систем: ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ, том 1, 89-100, Машиностроение, Москва, 1978.
- [5] ГАТАЛО, Р.,..., ЗЕЉКОВИЋ, М., МИЛИСАВЉЕВИЋ, Б.: Флексибилни технолошки системи и флексибилне технологије за обраду резањем, као основе



- за развој компјутером интегрисане производње, Научно истраживачки пројекат, Институт за производно машинство ФТН, Нови Сад, (Пројекат у току).
- [6] ZELJKOVIĆ, M., MILISAVLJEVIĆ, B., GATALO, R.: Dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena pod dejstvom periodične prinudne sile, *Zbornik radova MMA'94 V međunarodna naučno-stručna konferencija*, Novi Sad, 1994, 753-761.
- [7] KALAJDŽIĆ, M.: Metod konačnih elemenata, IAMA, Beograd, 1978.
- [8] KRAEMER, E.: *Maschinendynamik*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] КУДИНОВ, Динамика станков, Машиностроение, Москва, 1967.
- [10] ЛЕВИНА, З.М., ЗВЕРЕВ, И.А.: Расчет статических и динамических характеристик шпиндельных узлов методом конечных элементов, *Станки и инструмент*, No 8, 6-9, 1986.
- [11] MILISAVLJEVIĆ, B., ZELJKOVIĆ, M.: Slobodne oscilacije sa prigušenjem glavnih vretena mašina alatki, *Zbornik radova Instituta za proizvodno mašinstvo* br. 10, 193-213, IPM FTN Novi Sad, 1993.
- [12] НИКИТИН, Б. В.: Расчет динамических характеристик металлорежущих станков, МАШГИЗ, Москва, 1962.
- [13] НОВИЧКОВ, Ю.И., МИШЕНКОВ, Г.В., ЧИРКОВ, В.П.: Винужденные колебания: ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ, том 1, 101-116, Машиностроение, Москва, 1978.
- [14] ПИСАРЕНКО, Г.С.: Диссипативные характеристики механических систем. Демпфирующие свойства конструкционных материалов: ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ, том 6, 134-141, Машиностроение, Москва, 1981.
- [15] РАШКОВИЋ, Д.: Основи матричног рачунања са применама на техничке проблеме, Научна књига, Београд, 1971.
- [16] REDDY, V.R., SHARAN, A.M.: The Static and Dynamic Analysis of Machine Tools Using Dynamic Matrix Reduction Technique, *Int.J.Mach.Tools Manufact.*, Vol. 27, No.1, 105-112, 1987.
- [17] REDDY, V.R., SHARAN, A.M.: The Finite Element Modelled Design of Lathe Spindles: The Static and Dynamic Analyses, *Int.J.Mach. Tools Manufact.*, Vol.2., 1988.
- [18] SADEGHIPOUR, K., COWLEY, A.: The Effect of Viscous Damping and Mass Distribution on the Dynamic Behavior of a Spindle-Bearing System, *Int.J.Mach.Tools Manufact.*, Vol.28, No.1, 69-77, 1988.
- [19] РОЙТЕНБЕРГ, Я.Н. : Автоматическое управление, Наука, Москва, 1978.
- [20] TIMOSHENKO, P., YOUNG, D.H., WEAVER, W. Jr.: *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [21] THOMPSON, W.T.: *Theory of Vibration with Applications*, George Allen&Unwin, London, 1984.