

ORIGINALNI NAUČNI RAD

S. Jojin, R. Kovač\*

MODELIRANJE PRENOSA TOPLOTE KOD IZOTERMNOG  
OČVRŠĆAVANJA ODLIVKA

NUMERICAL SIMULATIONS OF ISOTHERMAL SOLIDIFICATION  
PROCESS

Summary

*A solution of mathematical model of solidification of a casting is presented. The explicit method of finite differences is used for determination of temperature distribution across the well of the casting and the system casting-mould. Numerical calculations took in account nonlinearities, like changing of material properties of the casting (conductivity and specific heat capacity) as a functions of temperature, and changing of the interfacial heat transfer coefficient between casting and the mould within time. Apart from that, during the time of cooling of liquid material, what is the first period, convection is taken in account by using effective value of conductivity for liquid state. The calculated results are compared with experimental measurements for solidification of aluminium. It is the example for isothermal solidification. The results are presented in the form of cooling curves in the most characteristics points of the system casting-mould like they are: middle of the casting, surface of the casting, out and inner surface of the wall of mould (die).*

---

\*Mr Siniša Jojin, asistent, Dr Risto Kovač, vanredni profesor, Instituta za proizvodno mašinstvo, FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, Vladimira Perića-Valtera 2., 21000 Novi Sad.

## SAŽETAK

U radu je prikazano numeričko rešenje matematičkog modela očvršćavanja odlivka oblika ploče. Rezultati su prikazani u obliku krivih hladjenja u određenim tačkama sistema odlivak-kalup. Da bi se prikazala kvalitativna vrednost rezultata, izvršeno je livenje odlivka čiji je hemijski sastav odgovarao tehničkom aluminijumu. Pored izračunatih temperatura prikazanih krivom hladjenja prikazane su i eksperimentalno određene. Proračunom su obuhvaćene nelinearnosti, fizičkih veličina: koeficijenta prelaza toplote sa odlivka na kalup, promena toplotne provodljivosti i specifične toplote materijala odlivka.

## 1. U V O D

U ovom radu prikazan je metod konačnih razlika i rešenja modela očvršćavanja odlivka oblika ploče, kao i poredjenje dobijenih rezultata sa rezultatima merenja. Istraživanje se odnosi na materijale koji očvršćavaju slojevito, a to su čisti metali i eutektičke legure. Merenja koja su objavljena vršena su na tehničkom aluminijumu.

## 2. MODEL OČVRŠĆAVANJA ODLIVKA SA PRIKAZOM METODE ZA REŠAVANJE

Očvršćavanje tehnički čistih metala i eutektičkih legura odvija se slojevito. Ovakav tip očvršćavanja može se predstaviti šemom na slici 1. Prenos toplote u oblasti kalupa, očvrstlog dela odlivka kao i tačne faze opisuju diferencijalna jednačina:

$$c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

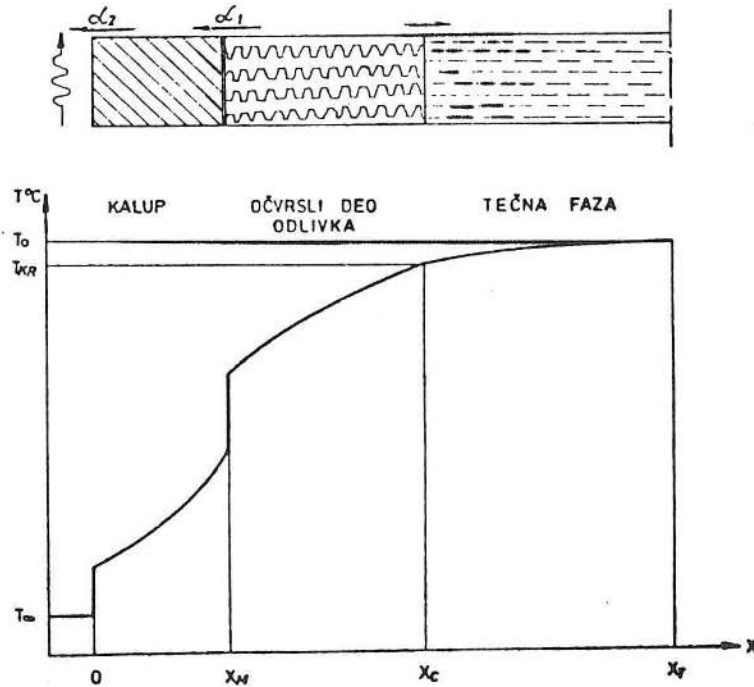
gde je:  $T=T(x)$  temperatura

$t$  - vreme

$x$  - koordinate

$c$  - specifična toplota

- $\rho$  - specifična masa  
 $\lambda$  - toplotna provodljivost



Slika 1.

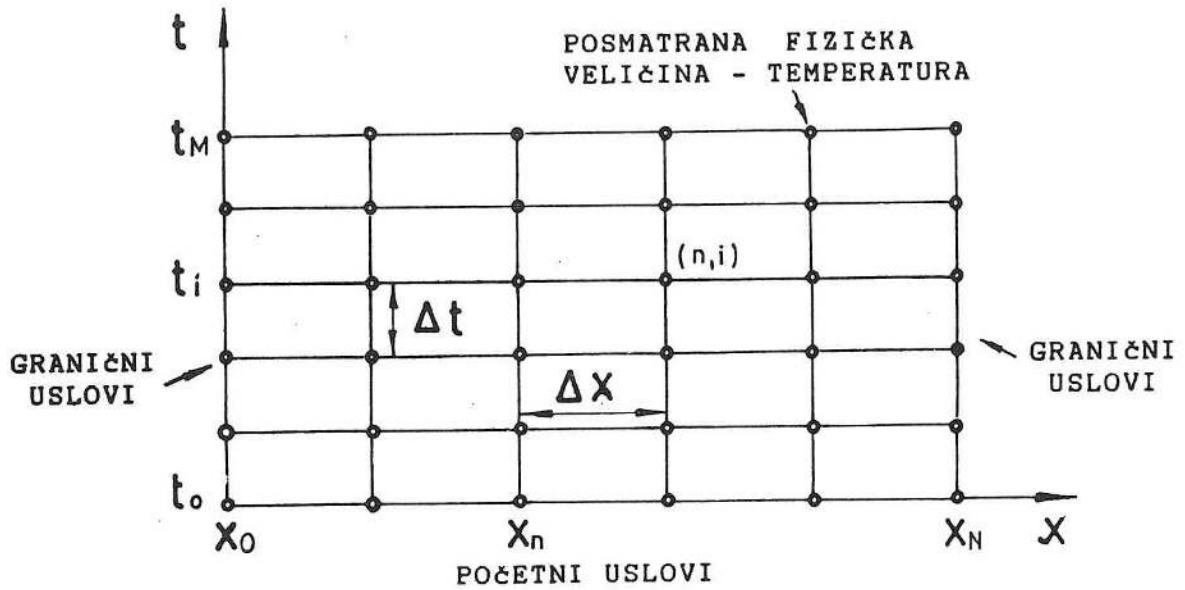
Svaka od veličina  $c$ ,  $\rho$  i  $\lambda$  ima određenu vrednost za posmatranu oblast u zavisnosti od faze. U oblasti između  $x=0$  i  $x=x_M$  ove veličine se odnose na materijal kalupa, između  $x_M$  i  $x_c$  čvrstu fazu (očvršli deo odlivka), a od  $x_c$  do  $x_T$  tečnu fazu.

Proces opisan jednačinom (1) mora se dopuniti sa početnim uslovima, koji predstavljaju početni temperaturni profil u kokili i livu, kao i graničnim uslovima na površinama koje određuju tačke  $0$ ,  $x_M$ ,  $x_c$  i  $x_T$ . Na površinama definisanim sa koordinatama  $0$  i  $x_M$  odvija se prelaz toplote opisan Njutnovim zakonom:

$$q = \alpha(T_2 - T_1) \cdot A \quad (2)$$

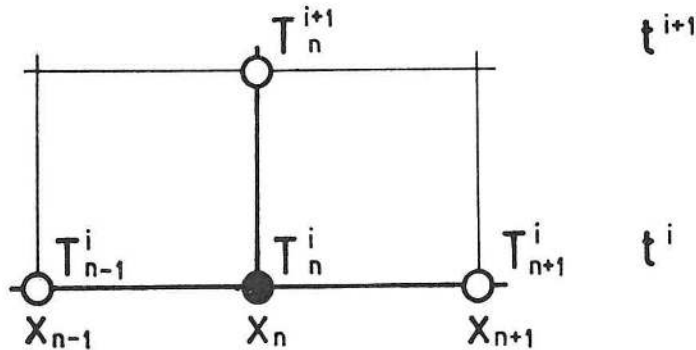
gde je:  $q$  - toplotni fluks

$\alpha$  - koeficijent prelaza toplote.



Slika 3.

Eksplisitivna šema konačnih razlika prikazana je na slici 4. Na osnovu temperature u susednim tačkama i temperature posmatrane tačke, izračunava se temperatura posmatrane tačke u narednom vremenskom trenutku.



Slika 4.

Tajlorovom aproksimacijom za prvi i drugi izvod parcijalni izvodi jednačine (1) matematičkog modela, mogu se napisati u obliku konačnih razlika:

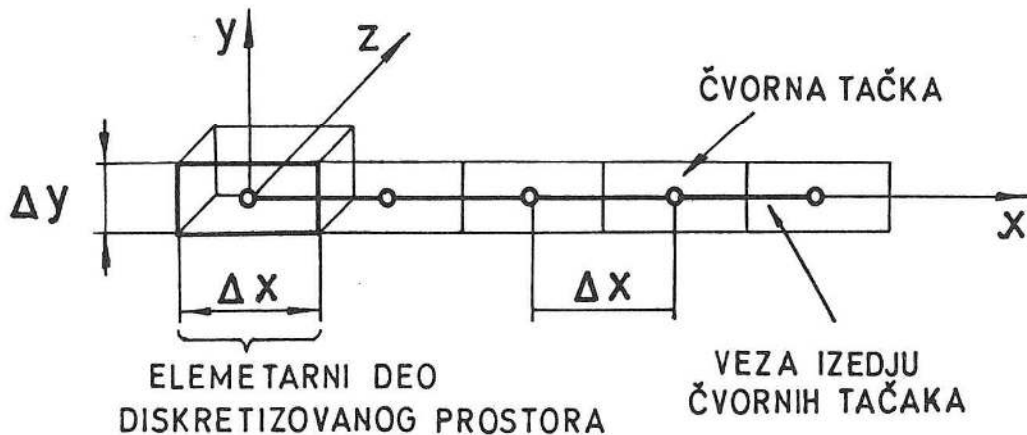
$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{n,i} = \frac{T_{n-1}^i + T_{n+1}^i - 2T_n^i}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

Granični uslov u termičkoj osi odlivka  $x=x_T$  predstavlja uslov simetrije.

Vrlo složen proces, u posmatranom slučaju, se odvija na graničnoj površini  $x=x_c$ , gde dolazi do prelaza metala iz tečnog stanja u čvrsto. Pomenuta složenost procesa posledica je oslobađanja toplote kristalizacije (latentne toplote) i kretanje fronta kristalizacije  $x_c \neq \text{const}$ . Prisutnost ovih pojava znatno usložnjava matematičke modele koji ih opisuju, te se zbog toga sužava mogućnost za iznalaženje analitičkih rešenja.

Razvoj digitalnih računara omogućio je široku primenu numeričkih metoda za rešavanje matematičkih modela očvršćavanja odlivka. Za rešavanje matematičkih modela procesa očvršćavanja odlivka pogodne su metode konačnih razlika i konačnih elemenata. Rešavanje modela definisanog jednačinama (1) i (2) obavljeno je pomoću eksplicitne metode konačnih razlika.

Suština metode konačnih razlika je diskretizacija prostora i vremena, kao i aproksimacija diskretizovanog prostora sa čvornom tačkom u sredini elementarnog dela (slika 2.).



Slika 2.

Promena temperatura između čvornih tačaka, posmatra se u okviru diskretizovanog vremena čiji je korak  $\Delta t$ . Mrežu čvornih tačaka u prostoru i vremenu prikazuje slika 3. Tada temperatura  $T(x; T)$  na mestu  $n \cdot \Delta x$  i vremenu  $i \cdot \Delta t$  označava se sa oznakom  $T_n^i$ , tj.

$$T(x; t) = T(n \cdot \Delta x; i \cdot \Delta t) \equiv T_n^i \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{n,i} = \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \quad (5)$$

Zamenom jednačina (4) i (5) u jednačinu (1) dobija se jednačina nestacionarnog jednodimenzionalnog provodjenja toplote u obliku konačnih razlika:

$$\frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} = a \frac{T_{n-1}^i + T_{n+1}^i - 2T_n^i}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

Gde je:  $a = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}$  - koeficijent temperaturne provodljivosti

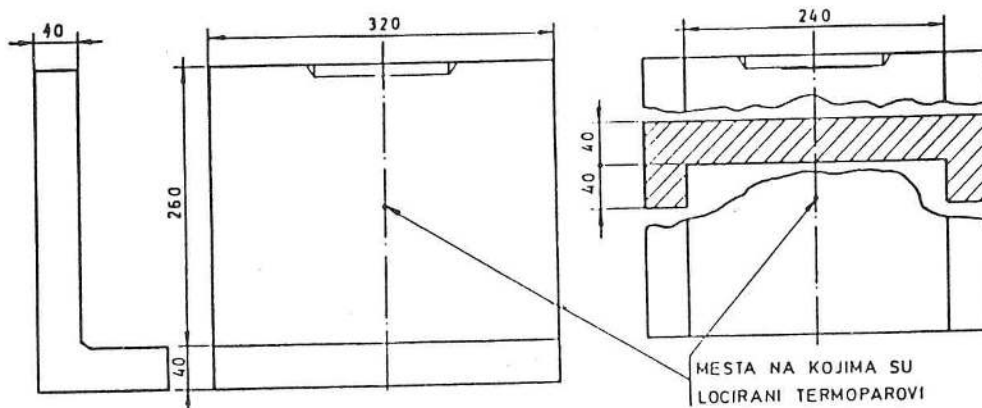
$i$  - indeks koji se odnosi na materijal kalupa i faze odlivka.

Iz prethodne jednačine dobija se izraz za  $T_n^{i+1}$  u obliku:

$$T_n^{i+1} = T_n^i + \frac{a \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{n+1}^i + T_{n-1}^i - 2T_n^i) \quad (7)$$

### 3. EKSPERIMENTALNI DEO RADA

Radi poredjenja rezultata dobijenih računskim putem i rezultata dobijenih snimanjem krivih hladjenja, obavljen je niz merenja u kokili izradjenoj od sivog liva. Pri livenju su snimane krive hladjenja u odlivku i kokili. Izgled kokile prikazuje slika 5. Dimenzije odlivka su 240x260x40.



Slika 5.

Kokila je izradjena od sivog liva SL 25 čiji je hemijski sastav: 3,3%C; 2,3%Si; 0,26%Mn; 0,03%S.

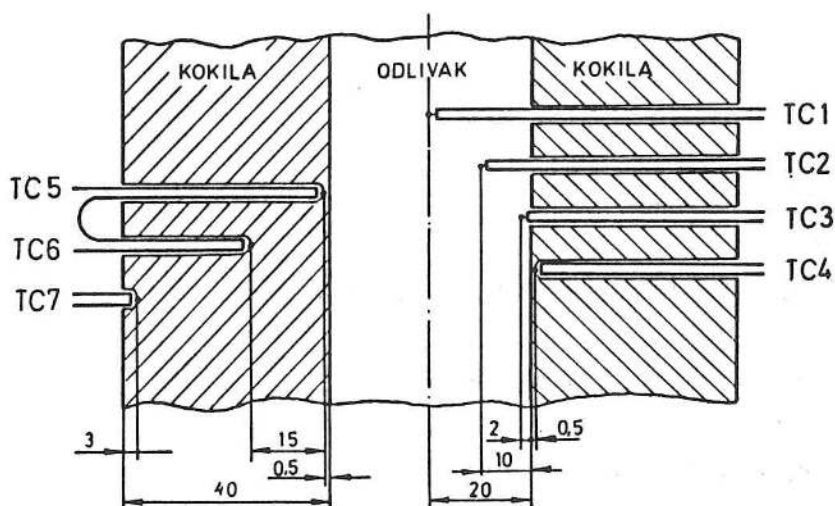
Pre livenja izvršeno je premazivanje kokile sa premazom koji se sastojao od: 5% oksid cinka, 3% vodeno staklo, 92% vode. Sloj premaza kretao se oko 0,2 mm.

Topljenje je obavljeno u laboratorijskoj elektrotopnoj peći. Live- ni materijal imao je sledeći hemijski sastav:

Si	Mn	Cr	Ni	Cu	Fe	Mo	Ti	Zn
0,21	0,002	0,006	0,057	0,038	0,40	0,012	0,011	0,066

Ostali deo je aluminijum.

Tokom merenja korišćeno je 14 termoparova lociranih u središnoj oblasti odlivaka i kokile. Njihov položaj u odnosu na ravan simetrije odlivka prikazan je na slici 6. Sa slike 6. uočava se položaj samo sedam termoparova, tri u levoj i četiri u desnoj polovini kokile, dok ostalih sedam ima simetričan raspored u odnosu na ravan simetrije.



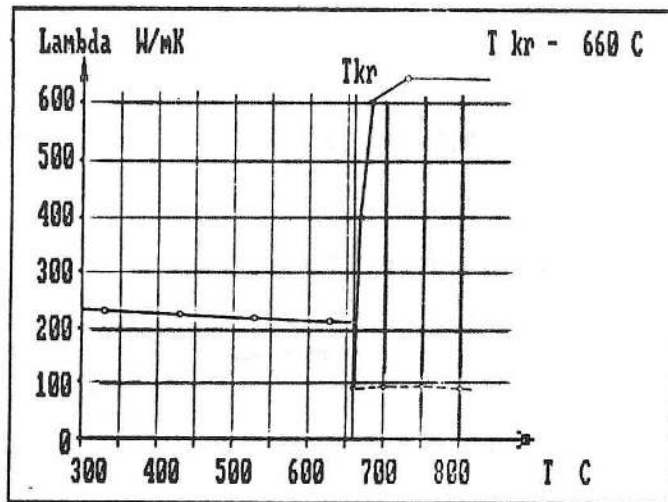
Slika 6.

#### 4. VREDNOSTI TOPLOTNO-FIZIČKIH VELIČINA KORIŠĆENIH PRI PRORAČUNU

Vrednosti toplotno-fizičkih osobina materijala odlivka, uzeti su iz literature /4/. Toplotna provodljivost prikazana je na slici 7.

Efektivna toplotna provodljivost tečne faze iznisila je 625 W/mK. Dijagram provodljivosti u zavisnosti od temperature prema kome je vršen proračun prikazuje slika 7. (punom linijom). Ovakvim prilazom uzet je uticaj prenosa toplote konvekcijom unutar liva.

Specifična toplota za pomenuti materijal ima vrednost za očvrslu deo odlivka 1090 J/kg K, a za rastop 1290 J/kg K.



Promena toplotne provodljivosti 'cistog' aluminijuma

Slika 7.

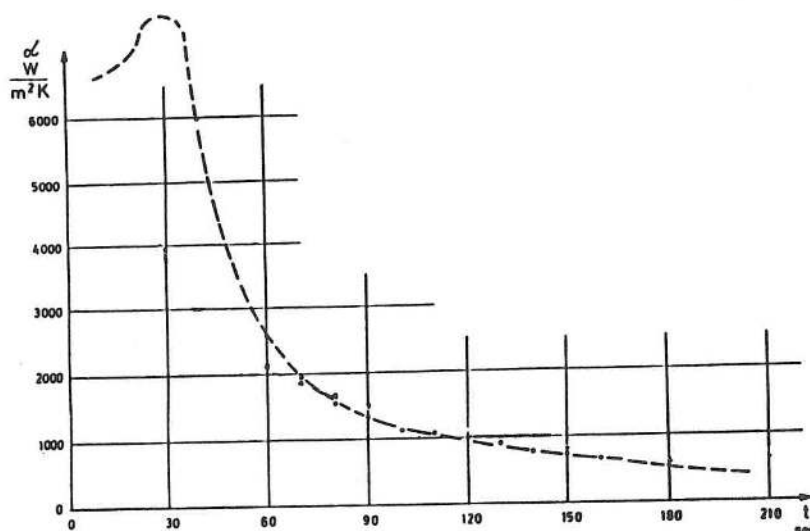
Specifična masa materijala odlivka je 2550 kg/m<sup>3</sup> a specifična toplota kristalizacije 390 kJ/kg.

Toplotno-fizičke osobine materijala kokile (SL 25), prema /4/ su sledeće:

- specifična toplota 531 J/kg K
- toplotna provodljivost 41 W/mK
- Specifična masa 7200 kg/m<sup>3</sup>

Vrednosti koeficijenta prelaza toplote sa odlivka na kokilu određene su u radu /6/, a prikazane su slikom 8. Koeficijent prelaza toplote sa kokile u okolinu iznosi 25 W/m<sup>2</sup>K.

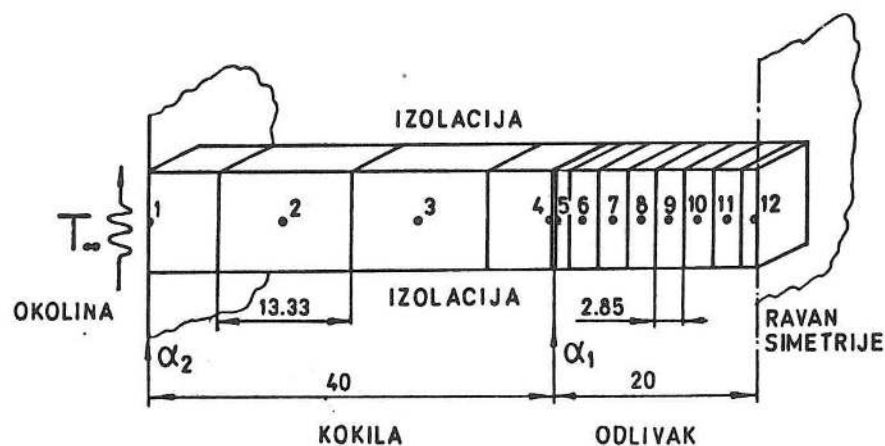




Slika 8.

### 5. REZULTATI DOBIJENI REŠAVANJEM MATEMATIČKOG MODELA OČVRŠĆAVANJA ODLIVKA

Da bi se rešio matematički model očvršćavanja odlivka oblika beskonačne ploče, predpostavljeno je telo prizmatičnog oblika kvadratne osnove dimenzije  $20 \times 20$  mm i dužine koja je jednaka polovini debljine odlivka i debljini kokile ( $20+40$  mm). Posmatrani element smatran je izolovanim sa svih strana sem sa jedne, koja predstavlja spoljašnju površinu kokile (slika 9.).



Slika 9.

Radi rešavanja postavljenog problema potrebno je izvršiti diskretizaciju prostora tj. podeliti deo kokile i odlivka u niz elementarnih delova. Izabrana je podela na dvanaest delova i to četiri u kokili i osam unutar odlivka. Svaki elementarni deo aproksimiran je odredjenom tačkom, a temperatura dela predstavljena je temperaturom u tački. Toplotne veze između pojedinih tačaka ostvaruju se preko koeficijenata koji se izražavaju relacijom:

$$K_i = \frac{\lambda \cdot A}{\Delta x} \quad (8)$$

gde je A površina poprečnog preseka prizme. Prelaz toplote sa odlivka na kokilu i sa kokile u okolnu sredinu odredjen je koeficijentom:

$$K_i = \alpha \cdot A \quad (9)$$

gde u prvom slučaju  $\alpha = \alpha_1(t)$ , a u drugom  $\alpha = \alpha_2 = \text{const.}$

Grafični uslov na prelazu iz tečne u čvrstu fazu može se napisati u formi konačnih razlika:

$$T_n^{i+1} = T_{KR} \quad (10)$$

Ovo predstavlja uslov izotermnog očvršćavanja, gde su:

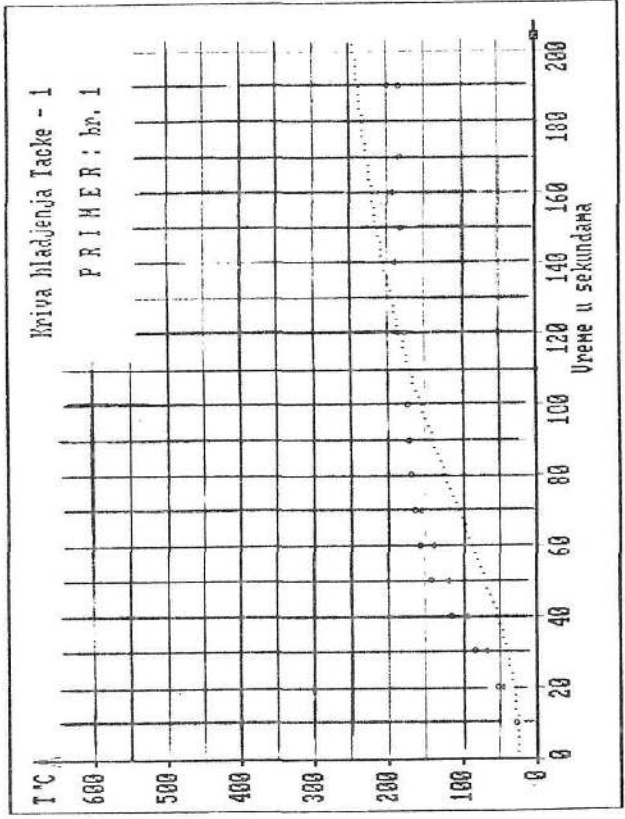
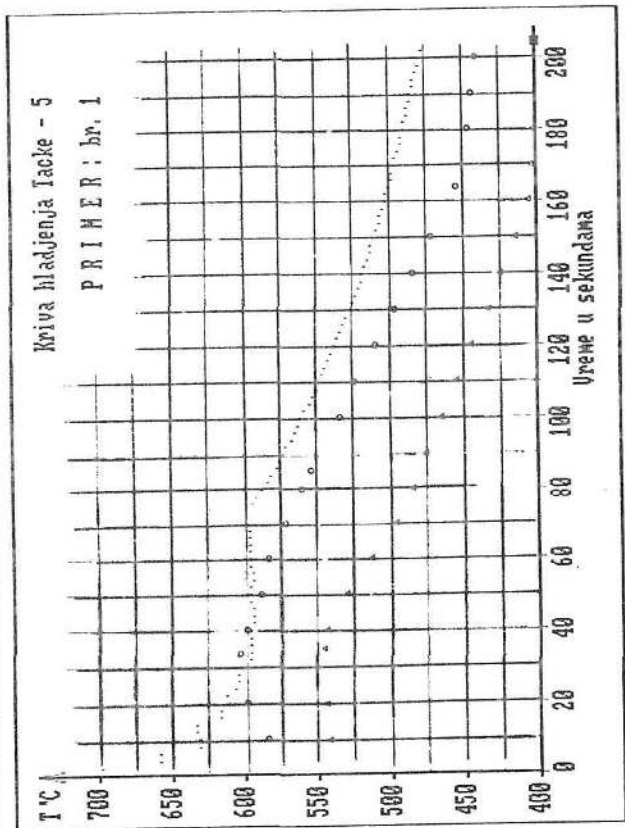
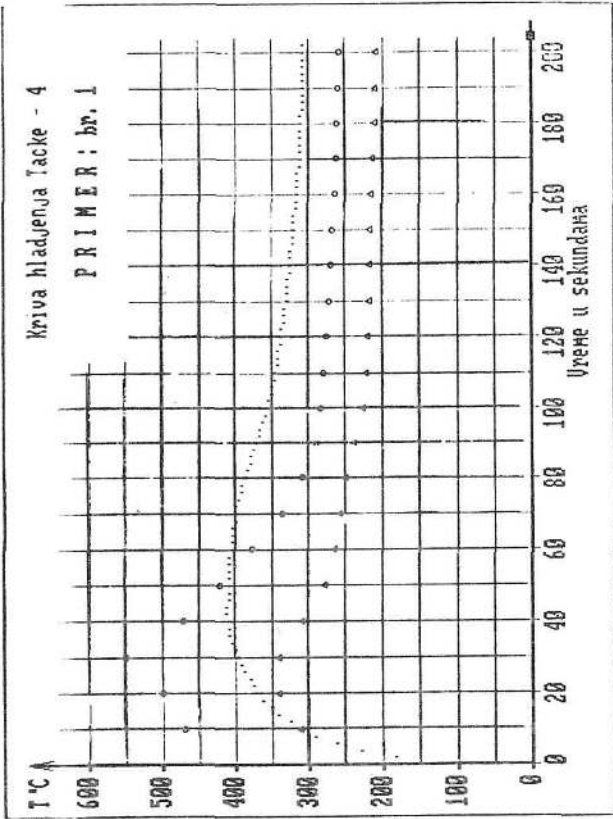
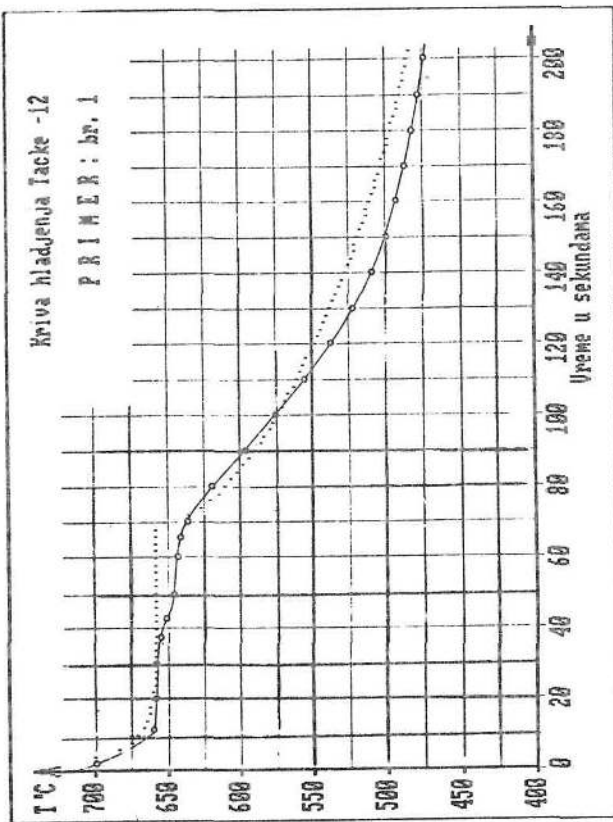
$T_{KR}$  - temperatura kristalizacije,

n - posmatrani elementarni deo unutar koga se kreće front kristalizacije.

U momentu kada ukupna masa u n-tom delu očvrstne, proračun se pod uslovom (10) nastavlja u n+1 elementarnom delu.

Rešavanje problema obavljeno je na računaru ET-188A PC/XT standarda proizvođača "Novosadska fabrika kabela". Vreme proračuna iznosilo je oko 11 minuta (sa koprocesorom 4 min.).

Vremenski korak pri proračunu iznosio je 0,072 S. Veličina vremenskog koraka bila je konstanta tokom celog proračuna. Ovako mala vrednost vremenskog koraka je jedan od razloga velike dužine rada programa, jer se za 200 sekundi posmatranog procesa ceo algoritam ponovi oko 2500 puta. Mali vremenski korak predstavlja ograničenje postavljeno uslovom stabilnosti /5/.



SIKA 10.

SIKA 11.

Rezultati proračuna zajedno sa rezultatima obavljenih merenja prikazani su grafički na sledećim slikama. Neprekidnim nizom tačaka predstavljen je rezultat proračuna, dok kružići i trouglaste tačke predstavljaju rezultat eksperimentalnog merenja u centralnoj osi zida odlivka (slika 10 gore). U šemi datoj slikom 9. to je tačka 12. Slika 10. dole predstavlja krive hladjenja na površini odlivka (tačka 5), a na slici 11. gore prikazane su krive hladjenja na površini kokile neposredno uz odlivak (tačka 4.). Promena temperature u funkciji vremena na površini kokile sa spoljašnje strane (tačka 1.) prikazana je na slici 11. dole.

Odstupanja računski dobijenih rezultata od eksperimentalnih, mogu se objasniti sledećim uzorcima:

- proračun je podrazumevao čist aluminijum, što u praksi nije bio slučaj;
- evidentno je prisustvo grešaka pri merenju eksperimentalnih krivi;
- grubo dislokacija prostora unutar kokile, dovodi do inertnog ponašanja ovoga dela sistema pri proračunu.

## 6. ZAKLJUČCI

Na osnovu napred izloženog mogu se izvesti sledeći zaključci:

- mogućnost uspešnog korišćenja numeričke analize pri proučavanju očvršćavanja odlivaka;
- uvođenje toplotne provodljivosti odlivka i koeficijenata prelaza toplote u obliku funkcija temperature i vremena, daje doprinos tačnosti rešenja;
- korišćenjem efektivne toplotne provodljivosti u oblasti tečne faze uzet je u obzir uticaj konvekcije što je uticalo na približnije vrednosti izračunatih temperatura merenim;
- visoka sličnost po karakteru računski dobijenih rezultata i eksperimentalnih rezultata.

## 7. LITERATURA

- /1/ Ho K., Pehlke R.D., University of Michigan, Ann Arbor, MI, "Transient Methods for Determination of Metal-Mold Interfacial Heat Transfer", AFS Transactions'83-80, (689-697).
- /2/ Pehlke R.D. professor, Univ. Michigan, "Numerical Simulation of Casting Solidification", AFS Transactions, 1973-122;
- /3/ Kovač R., "Uticaj mehaničkih oscilacija na formiranje strukture legure aluminijuma", Doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.
- /4/ THERMOPHUSICAL PROPERTIES OF MATTER, Colume 1, THERMAL CONDUCTIVITY - Metallic Elements and Alloys V.S. Toulovkian IF/ PLENUM, New York - Washington, 1970;
- /5/ Jojin S. Fakultet tehničkih nauka, Institut za proizvodno mašinstvo, Novi Sad, "Rešenje matematičkog modela formiranja odlivka numeričkom metodom", Magistarski rad, Novi Sad, 1988.
- /6/ Jojin S., Kovač R., Fakultet tehničkih nauka, Institut za proizvodno mašinstvo, Novi Sad, "Odredjivanje koeficijenta prelaza toplote sa odlivka na kalup", Zbornik radova 5-6, IPM, 1989.